دكتور
سامى نجيب
أستاذ التأمين - كلية التجارة - جامعة بنى سويف
رئيس شعبة بحوث إدارة الأخطار والتأمين
أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا
إستشارى التأمين بالمجلس الأعلى للجامعات
خبير تأمين إستشارى ومحكم

رياضيات التأمين على الحياة

- تمهيـــــــــــــــــــــــــــد.
- جـــــداول وإحتمــــــالات الحياة.
- حساب القسـط الوحـــيد الصـــافى.
- الأقساط السنوية الصافية المتساوية.
- العقود ذات المبالغ أو الأقساط المتغيرة.
- الإحتياطـــــــيات الصـــافيـــــة.

الطبعة الثانية
ديسمبر/ ٢٠١٥

دار التأمينات
خبراء إستشاريون فى شئون التأمين والإستثمار
٦ شارع محمود حافظ، ميدان سفير، شقة ٨٠٥ مصر الجديدة
ص.ب: ٥٨٧٨ هليوبوليس غرب – رقم بريدى ١١٧٧١
تليفون ٢٦٤٣٧٣٣٩ مباشر وفاكس ٢٦٣٥٧١٢١
www.samynaguib.com

تمهيد:

ينقسم التأمين إلى تأمين خاص أو تجارى وتأمين إجتماعى وفى كلا النوعين فلابد من تقدير للقيمة الإحتمالية لمبالغ التأمين وتعويضاته التى يلتزم المؤمن بأدائها عند تحقق الخطر الإحتمالى المؤمن منه حتى يمكن تحديد ما يلتزم بأدائه المعرضين للخطر أى تدبير الموارد اللازمة لمواجهة مبالغ التأمين وتعويضاته.

وحيث يقوم التأمين الخاص أو التجارى على أساس فردى محوره إرادة الفرد المتعاقد ويسعى فيه المؤمن إلى تحقيق الربح فقد عرفنا عقد التأمين بأنه العقد الذى يتعهد فيه المؤمن بأداء مبلغ التأمين عند تحقق خطرا معينا مقابل إلتزام المؤمن له المتعاقد بأداء مبلغ أقل سواء دفعة واحدة تسمى بالقسط الوحيد أو على أقساط.

وبالطبع فإن المؤمن فى التأمين الخاص أو التجارى **يقوم بتقدير القيمة الإحتمالية لتعهده بالنسبة لكل وثيقة تأمين على حده ثم يحملها بمصاريف الإصدار وعمولات التسويق وغيرها من المصاريف الإنتاجية والإدارية والأرباح وبالتالى فإن ما يؤديه المؤمن له المتعاقد يتحدد بما يسمى بالقسط أو الأقساط الصافية** (أى القيمة الإحتمالية لتعهد المؤمن) **بالإضافة إلى عدة تحميلات أخرى ولذا يطلق على المجموع القسط أو الأقساط التجارية.**

وفى الإطار السابق فإننا نهتم فى هذا الباب بالتأمين على الحياة: أى بالأخطار التى يهتم بها كل من التأمين الخاص أو التجارى والتأمين الإجتماعى وذلك بهدف دراسة أسس حساب قسط أو أقساط التأمين الخاص أو التجارى وإحتياطياته.

وفى هذا الشأن فلابد من دراسة إحتمالات الحياة والوفاه والتى يمكن قياسها بإستخدام ما يسمى بجداول الحياة أو الوفاه.

وهكذا تنقسم الدراسة فى هذا الباب **إلى خمسة فصول يهتم أولها** بجداول وإحتمالات الحياة **ويهتم الثانى بما يسمى** بالقسط الوحيدالصافى **ويهتم الثالث** بالأقساط السنوية المتساوية **ويهتم الفصل الرابع** بأقساط العقود ذات المبالغ أو الأقساط المتغيرة **ونخصص الفصل الخامس** للإحتياطيات.

جداول وإحتمالات الحياة

المبحث الأول : جداول الحياة أو جداول الوفاة
المبحث الثانى : إحتمالات التأمين على الحيــاة

تمهيد :

طالما يتعامل التأمين مع أخطار محتملة الحدوث فى المستقبل فلابد من التعرف على مقدار إحتمال تحقق هذه الأخطار أى تقدير الأخطار تقديرا كميا وهو ما يستدعى دراسة موضوع الإحتمالات وخاصة تطبيقاتها فى التأمين على الحياة.

فإذا ما إقتصرنا على دراسة الإحتمالات فى مجال الحياة فسيتبين لنا أن من غير الميسور تقدير هذه الإحتمالات حسابيا على أساس الإدارك والبرهنة بالتعرف على مسببات تلك الأخطار والعوامل التى تتحكم فى حدوثها ومدى تأثير كل منها، وكما نؤمن فأن الحياة والوفاة علمهما عند الله سبحانه وتعالى، ومن هنا فإن الأسلوب العملى الذى تلجأ إليه هيئات التأمين هو الأسلوب التجريبى بمعنى الإعتماد على خبرة إحصائية لفترة طويلة نسبيا عن حالات الوفيات لجميع الأعمار وقياس إحتمالات الوفاة خلال مدة سنة واحدة لكل عمر ثم تكوين ما يسمى بجدول الحياة Life Table أو جدول الوفاة Mortality Table ويقترب الإحتمال التجريبى من الإحتمال الحقيقى أو الرياضى فى ظل الأعداد الكبيرة.

وهكذا ينقسم هذا الفصل إلى مبحثين يهتم أولهما بجداول الحياة ويهتم الثانى بإستخدام هذه الجداول فى حساب أو قياس الإحتمالات فى التأمين على الحياة وعلى وجه الخصوص إحتمالات الحياة والوفاة لشخص واحد ولشخصين.

المبحث الأول

جداول الحياة أو جداول الوفاة

Life or Mortality Tables

- خبرتنا فى الماضى أساس تعاملنا مع المستقبل:

من منا يستطيع أن يتنبأ بأنه سيعيش ولو للحظة قادمة أو بأنه سيموت فى لحظة معينة قادمة، بل من منا يستطيع أن يتنبأ بأنه سيعيش إلى فترة معينة أو على العكس سيموت خلال فترة محددة وذلك مهما كان عمره ومهما كانت صحته، فإن كنا مؤمنين بالله فإننا نؤمن بأن علم ذلك عنده سبحانه وتعالى، وإلا فسنجد أن هناك العديد من العوامل والمؤثرات التى تتصل بإحتمالات الحياة والوفاة والتى يستحيل معها إستخلاص فترة أو تاريخ معين للحياة أو الوفاة وبالتالى يتعذر التقدير النظرى أو الرياضى لإحتمالات الحياة لفترة معينة قادمة أو إحتمالات الوفاة خلال فترة محدودة قادمة.

إذن كيف يمكن للتأمين أن يتعامل مع خطر الحياة أو مع خطر الوفاة دون أن يتعرف على إحتمالات الحياة أو إحتمالات الوفاة طالما كان من المتعذر حسابيا تقدير تلك الإحتمالات.

السر وراء ذلك أن نظم التأمين على الحياة لا تتعامل مع أخطار الحياة والوفاة (ومع العديد من الأخطار الأخرى) على أساس الإدراك والبرهنة كما هو الحال فى الإحتمالات النظرية وإنما تتعامل معها على أساس الخبرة الإحصائية أى على الأساس التجريبى.

فعلى المستوى القومى نلاحظ أن الدول تقوم بتسجيل المواليد والوفيات وتقوم بإجراء تعدادات عامة للسكان أى أن هناك إحصاءات قومية يمكن منها التعرف على حالات الوفيات عند كل عمر من الأعمار على المستوى القومى.

وعلى مستوى هيئات التأمين نلاحظ أن لديها خبرتها الإحصائية عن مجموعة المؤمن عليهم لديها والتى يمكن منها التعرف على إحتمالات الوفاة عند كل من الأعمار.

ولكن هل يعنى ذلك أنه يمكن من خلال التأمين على الحياة أن نتعرف على إحتمال حياة شخص معين إلى عمر معين أو على العكس إحتمال وفاته خلال فترة معينة، أن ذلك ما لا يمكن لأحد أن يقول به ليس فقط بالنسبة لخطر الحياة والوفاة بل أيضا بالنسبة لأى خطر آخر من الأخطار القابلة للتأمين والتى نتعرض لها فى أشخاصنا أو فى أحد ممتلكاتنا أو فى ثروتنا بوجه عام، ولا تستلزم ذلك العمليات التأمينية بل أن التأمين على العكس يفترض أن يكون الخطر على المستوى الفردى إحتماليا فى المستقبل وإلا أصبح غير قابلا للتأمين.

يكفى لقيام التأمين إذن إمكانية قياس الخطر كميا ليس على مستوى حالة بذاتها حيث يظل وقوع الخطر إحتماليا بل على مستوى كافة الحالات المعرضة للخطر حيث يكون تحقق الخطر مؤكدا، وإذا لم يكن من الممكن قياس الخطر نظريا أو رياضيا فإن من الممكن ذلك من واقع الخبرة الإحصائية المتوافرة عن فترة سابقة طويلة نسبيا وعلى ضوء الماضى يمكن رياضيا أن نتعامل مع المستقبل والذى سيصبح بدوره ماضيا ويتخذ أساسا حديثا للتعامل تأمينيا مع الخطر فى فترة لاحقة.

ولكن هل يمكن أن نطمئن إلى أن خبرتنا فى الماضى ستكون أساسا سليما للتعامل مع المستقبل، إننا إذا تصورنا إلقاء قطعة من النقود المعدنية على منضدة وقمنا بتحليل هذا الحادث قبل أن نقوم بإلقاء تلك القطعة فسندرك أن إحتمال ظهور سطحها العلوى هو ٥٠% (فإما أن يظهرهذا السطح العلوى أو يظهر السطح الآخر) كما يمكن البرهنة على ذلك، إلا إننا لو قمنا بإجراء تجربة عملية فى هذا الشأن لعدد قليل من المرات أو لعدد محدود من القطع المعدنية (المتوازنة والمتماثلة) فقد يظهر السطح العلوى فى أكثر من أو أقل من ٥٠% من تلك المرات أو هذه القطع وبالتالى يختلف الإحتمال النظرى أو الرياضى عن الإحتمال التجريبى، فإذا كان هذا هو الشأن بالنسبة لإحتمالات التى يمكن أصلا قياسها رياضيا أوحسابيا فكيف إذن يمكن الإطمئنان إلى سلامة الإحتمالات التجريبية التى لا يمكن أصلا تقديرها حسابيا.

نبادر هنا إلى القول بأنه من الثابت أن الإحتمال النظرى أو الحسابى يتساوى مع الإحتمال التجريبى إذا ما كان عدد التجارب لانهائيا وكلما كان عدد التجارب كبيرا كلما إقترب الإحتمال التجريبى من الإحتمال الحقيقى أى من الإحتمـال النظرى أو الحسـابى وتضاءل الفرق

بينهما حتى يقترب من الصفر إذا ما إقترب عدد التجارب من اللانهاية وهذا ما يسمى بقانون الأعداد الكبيرة.

ووفقا لقانون الأعداد الكبيرة فإن

$$\text{الإحتمال الحقيقى} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{أ}}{\text{ن}}$$

حيث ترمز (ن) إلى عدد التجارب التى أجريت وترمز (أ) إلى عدد المرات التى تحقق فيها الإحتمال وبالتالى فإن:

إحتمال التحقق يقدر بالكمية $\frac{\text{أ}}{\text{ن}}$

- أهمية المتابعة الدورية للخبرة الإحصائية:

إنتهينا فى البند السابق إلى أننا نتعامل فى التأمين مع أخطار الحياة والوفاة (ومع العديد من الأخطار الأخرى) على أساس ما يعرف بالإحتمال التجريبى أى على أساس الخبرة الإحصائية لفترة طويلة نسبيا ولعدد كبير جدا من الوحدات المعرضة للخطر.

ومع ذلك فيجب أن نعترف بأننا نعيش فى عالم من المتغيرات وفى مجتمع حركى Dynamic Population وبالتالى فإن توقعات الحياة Life expectancy تتغير بتغير الأحوال السكانية وبتغير الظروف الصحية والإجتماعية والإقتصادية كما تتغير أساليب جمع البيانات الإحصائية والتحقق من صحتها، وهكذا فإن الخبرة البعيدة لا تصلح للتنبؤ بالمستقبل القريب ويتعين النظر بصفة دورية ومستمرة فى الخبرة المتوافرة لدينا عن الأخطار التى نتعامل معها.

- تبويب الخبرة الإحصائية (بعد تحليلها) فى جداول لحساب الإحتمالات بسهولة:

بعد توافر الخبرة الإحصائية وتحليلها أو تطويعها يتم تبويبها فيما يسمى بجداول الحياة أو جداول الوفاة بهدف قياس أو حساب إحتمالات الحياة وإحتمالات الوفاة بسهولة، ويتكون جدول الحياة (أو جدول الوفاة) من عدد من الأعمدة التى نبين فيما يلى الخمسة الأولى منها والتى سنعتمد عليها فى دراستنا (البيانات من واقع جدول الحياة الإنجليزى A ٤٩-٥٢ ult والذى يستخدم حاليا فى الحسابات الإكتوارية فى مصر).

السن	عدد الأحياء	عدد الوفيات السنوى	إحتمال الوفاه السنوى	إحتمال الحياة
س x	ح س ix	وس dx	ف س qx	ل س px
١٠	٩٩٩٩٩٩	١١١٠	٠,٠٠١١١	٠,٠٩٩٨٨
١١	٩٩٨٨٨٩	١١٠٩	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩
١٢	٩٩٧٧٨٠	١١٠٨	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩
١٣	٩٩٦٦٧٢	١١٠٦	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩
١٤	٩٩٥٥٦٦	١١٠٥	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
٩٥	٨٤٧٤	٢٩٣٩	٠,٣٤٦٨٣	٠,٦٥٣١٧
٩٦	٥٥٣٥	٢٠٣٢	٠,٣٦٦٠٦	٠,٦٣٢٩٤
٩٧	٣٥٠٣	١٣٥٨	٠,٣٨٧٤٧	٠,٦١٢٥٣
٩٨	٢١٤٥	٧٨٥	٠,٤٠٧٩٥	٠,٥٩٢٠٥
٩٩	١٢٧٠	٥٤٤	٠,٤٢٨٤٠	٠,٥٧١٦٠

وعلى ضوء هذا الجدول يمكن بيان الأعمدة الخمسة الأولى من جداول الحياة على النحو التالى:

أولا: السن *(ونرمز له بالرمز س ورمزه الدولىx)*

تمثل بالعمود الأول من أى جدول حياة الأعمار المختلفة وعادة ما يبدأ ذلك بالعمر (صفر) للمواليد الجدد، أو بعمر أكبر (١٠ أو٢٠) وفقا للحاجة وينتهى بالعمر ٩٩ أو ما يزيد عن ذلك قليلا، أى بنهاية العمر.

وقد ينقسم عمود السن إلى عمودين فرعيين، أولهما للذكور والآخر للإناث، نظرا لإختلاف إحتمالات الحياة والوفاة بينهما.

ثانيا: عدد الأحياء) Number of Living ونرمز له بالرمز حس ورمزه الدولى i_x)

ويقصـد بذلك عدد الأحياء الذين يبلغـون تمـام السن (س) من بين من هم فى سن أصغر من (س) وفقا للجدول.

وعادة ما يبدأ عدد الأحياء بالجدول برقم إفتراضى كبير ومريح مثلا ١٠٠٠٠٠ أو١٠٠٠٠٠٠ أو١٠٠٠٠٠٠٠ وهو ما نسميه بأساس الجدول.

وبالطبع فإن عدد الأحياء المفترض يتناقص مع تقدم العمر أى بعدد الوفيات حتى نصل إلى آخر العمر فلا يتبقى من الأحياء أحدا. وهكذا فإنه بالرجوع إلى بيانات الجدول المبين بالصفحة السابقة يتبين أن عدد الأحياء فى تمام السن (١٠) هو أساس الجدول ويبلغ ٩٩٩٩٩٩ شخص (مواليد)، ويتناقص هذا العدد حتى يبلغ ٧٢٦ فى تمام السن ١٠٠ يموتون قبل بلوغهم سن الـ١٠١ عاما، وبموتهم ينتهى العدد الأساسى للجدول.

ومن الضرورى أن نلاحظ هنا أن جدول الحياة يتم إعداده من خلال تصور متابعة عدد الأحياء الذين يكونون أساس الجدول حتى نهاية العمر، وبذلك فإن عدد الأحياء فى أى سن حن يعتبر عددا نسبيا وليس مطلقا إذ يتعين أن ينسب إلى من هم فى سن أقل. ومن هنا فإن ح س كما ذكرنا فى البداية تمثل عدد الأحياء الذين بلغوا تمام السن (س) من بين من هم فى سن أقل.

وعلـى ذلـك فإنــه وفقـا للجـدول عاليــه فإن ح١٣ عبـارة عن ٩٩٦٦٧٢ شخصا بلغوا سن الثلاثة عشر سنة من بين ٩٩٧٧٨٠ شخصا كانوا فى سن ١٢ عاما ومن بين ٩٩٨٨٨٩ شخصا كان عمرهم ١١ سنة، ومن بين ٩٩٩٩٩٩ فى تمام السن ١٠ سنوات.

كما يمكن القول بأنه من بين ٩٩٩٩٩٩ ممن هم فى سن ١٠ سنـوات أو من بين ٩٩٧٧٨٠ ممــن هــم فــى عمـر ١٢ عامــا فــإن ٩٩٦٦٧٢ شخصا يبلغون تمام العمر ١٣ سنة.

وبالطبع فإن عدد الأحياء فى أى سن يساوى عدد الأحياء فى السن الأقل مطروحا منه عدد الوفيات التى تقع بين السن الأكبر والسن الأقل، وهذا هو العدد المبين بالعمود الثالث من الجدول والذى يرمز له بالرمز وس.

وعلى ذلك فإن ح س =ح س-١ - وس-١

أى أن ح س+١ =ح س - وس

وبذلك فإن ح٣ = ح٢ - و٢

= ٩٩١١٧٢٥ ـ ١٥٠٦٦

= ٩٨٩٦٦٥٩

ثالثا: عدد الوفيات Number of Deaths (وس ورمزه الدولى dx)

ويقصد بذلك عدد الوفيات بين تمام السن (س) وتمام السن (س+١) من بين أشخاص عددهم (ح س) فى تمام السن (س) وفقا للجدول.

وبمعنى آخر فإن (وس) تمثل عدد الوفيات التى تقع لأشخاص عددهم (ح س) قبل بلوغهم تمام السن (س+١).

وهكذا .. فإن وس = ح س – ح س+١

ومن الجدول و٩٦ = ح٩٦ - ح٩٧

= ٥٥٣٥ ـ ٢٠٣٢

= ٣٥٠٣

وكما أشرنا فى بيان (ح س) فإن (وس) أيضا تعبر عن أرقام نسبية وليست مطلقة، وعلى ذلك ووفقا للجدول فإنه من بين ٩٩٩٩٩٩ فى تمام العاشرة يموت ١١١٠ شخصا قبل بلوغ الحادية عشر (و١٠) ويموت ١٧٤٧٥ شخصا فى العمر ١١ عاما وقبل تمام العمر ١٢ (و١١).

كما يمكن القول أنه وفقا للجدول فإن ٢٠٣٢ شخصا يموتون فى السن ٩٧ من عمرهم، أى بين تمام العمر ٩٦ وتمام العمر ٩٧ (و٩٦)

وذلك من بين ٥٥٣٥ شخصا فى تمام السن ٩٦، أو من بين ٨٤٧٤ شخصا فى تمام السن ٩٥، أو من بين ٩٩٩٩٩٩ ممن فى العاشرة من عمرهم.

رابعا: إحتمال الوفاة السنوYearly death rate (ف س ورمزه الدولى qx).

ويقصد بذلك مقدار إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) يموت قبل بلوغه تمام السن (س+١).

أى أن إحتمال الوفاة السنوى لشخص فى تمام السن (س)

$$= \frac{\text{عدد الوفيات بين تمام السن س وتمام السن س+١}}{\text{عدد الأشخاص فى تمام السن س}}$$

$$= \frac{ح_{س} - ح_{س+١}}{ح_{س}} = \frac{و_{س}}{ح_{س}}$$

وعلى ذلك ووفقا للجدول فإن

$$ف_{١٠} = \frac{و_{١٠}}{ح_{١٠}}$$

$$= \frac{١١١٠}{٩٩٩٩٩٩} = ٠,٠٠١١١$$

$$، ف_{٩٦} = \frac{و_{٩٦}}{ح_{٩٦}}$$

$$= \frac{٢٠٣٢}{٥٥٣٥} = ٠,٣٦٧١٢$$

خامسا: إحتمال الحياة السنوى Yearly rate of Survival (ل س ورمزه الدولىpx)

ويقصد به مقـدار إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) يعيش حتى يبلغ تمام السن (س+١).

أى أن إحتمال الحياة السنوى

$$= \frac{\text{عدد الأشخاص فى تمام السن س+١}}{\text{عدد الأشخاص فى تمام السن س}}$$

$$= \frac{ح_{س+١}}{ح_{س}}$$

وعلى ذلك ووفقا للجدول فإن

$$ل_{١٠} = \frac{ح_{١١}}{ح_{١٠}}$$

$$= \frac{٩٩٨٨٨٩}{٩٩٩٩٩٩} = ٠,٩٩٨٨٩٩$$

$$= \frac{٣٥٠٣}{٥٥٣٣} = ٠,٦٣٢٨٨$$

$$ل_{٩٦} = \frac{ح_{٩٧}}{ح_{٩٦}}$$

*العلاقة بين ح س، وس، ف س، ل س:

١- رأينا فى بيان المقصود بتلك الرموز أن من بين ح س من الأشخاص فى تمام السن س فإن ح س+١ من الأشخاص يعيشون حتى تمام السن س+١ ويموت وس قبل بلوغهم هذا السن، أى بين تمام السن س وتمام السن س+١.

وهكذا إستخلصنا أن:

$ح_{س} = ح_{س+١} + و_{س}$

أو أن $ح_{س+١} = ح_{س} - و_{س}$

أو أن $و_{س} = ح_{س} - ح_{س+١}$

٢- طالما أن المقصود بإحتمال الوفاة السنوى (ف $_{س}$) إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) يموت قبل بلوغه تمام السن (س+١) فى حين أن إحتمال الحياة السنوى (لس) يقصد به إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) يعيش حتى يبلغ تمام السن (س+١) فإن:

$$ف_س = \frac{و_س}{ح_س} \quad ،$$

$$ل_س = \frac{ح_{س+١}}{ح_س}$$

وطالما أن الشخـص فى تمــام السن (س) أما أن يعيش حتى يبلغ تمام السن (س+١) أو يموت قبل بلوغه هذا السن .. فإن:

$$ف_س + ل_س = ١$$

ويمكن إثبات ذلك جبريا .. إذ أن

$$ف_س + ل_س = \frac{و_س}{ح_س} + \frac{ح_{س+١}}{ح_س}$$

$$= \frac{و_س + ح_{س+١}}{ح_س}$$

$$= \frac{ح_س}{ح_س} = ١$$

وعلى ذلك فإن..

$$ل_س = ١ - ف_س$$

ووفقا للجدول فإن..

$$ل_{١٣} = ١ - ٠,٠٠١١١ = ٠,٩٩٨٨٩$$

٣- حيث يستفاد من مفهوم عمود عدد الأحياء أن من بين (ح $_{س}$) من الأشخاص يعيش (ح $_{س+ن}$) من الأشخاص حتى تمام السن (س+ن).

وعلى ذلك فإن عدد الوفيات بين تمام السن (س) وتمام السن (س+ن)

$$= ح_{س} - ح_{س+ن}$$

$$= و_{س} + و_{س+١} + \cdots + و_{س+ن-١}$$

ويمكن إثبات ذلك جبريا، حيث أن

$$و_{س} = ح_{س} - ح_{س+١}$$

$$،\quad و_{س+١} = ح_{س+١} - ح_{س+٢}$$

$$،\quad و_{س+٢} = ح_{س+٢} - ح_{س+٣}$$

$$،\quad و_{س+ن-٢} = ح_{س+ن-٢} - ح_{س+ن-١}$$

$$،\quad و_{س+ن-١} = ح_{س+ن-١} - ح_{س+ن}$$

وبالجمع ينتج أن:

$$و_{س} + و_{س+١} + و_{س+٢} + \cdots + و_{س+ن-١} = ح_{س} - ح_{س+ن}$$

ومن الجدول فإن..

$$و_{٩٥} + و_{٩٦} + و_{٩٧} + و_{٩٨} = ح_{٩٥} - ح_{٩٩}$$

٤- حيث يتناقص عدد الأحياء فى أى سن ($ح_{س}$) بمقدار عدد الوفيات التى تتم فى السنوات من تمام السن (س) حتى نصل إلى آخر الجدول حيث نهاية العمر لكافة الأحياء، فإنه يمكن القول بأن

$$ح_{س} = و_{س} + و_{س+١} + \cdots + و_{ى}$$

حيث (ى) أكبر سن فى الجدول، وعنده يموت آخر الأحياء.

ويستفاد ذلك جبريا من العلاقةالسابقة إذا ماإفترضنا أن س+ن-١ تساوى أكبر سن فى الجدول (ى) وبالتالى فإن ح س+ن تساوى $ح_{ى+١}=٠$

أى أن:

$$و_{س} + و_{س+١} + \cdots + و_{ى} = ح_{س} - صفر$$

$$= ح_{س}$$

كيفية إعداد جداول الحياة:

يتم إعداد جداول الحياة على ضوء العلاقات التى رأيناها بين أعمدة هذه الجداول وذلك بعد حساب إحتمالات الوفاة ($ف_{س}$) أو إحتمالات الحياة ($ل_{س}$)، إذ أنه إذا ما تعرفنا على إحتمال الوفاة يكون من اليسير معرفة إحتمال الحياة حيث أن..

$ل_{س} = ١ - ف_{س}$

وإذا ما تعرفنا على إحتمال الحياة يكون من اليسير معرفة إحتمال الوفاة حيث أن..

$ف_{س} = ١ - ل_{س}$

وهكذا لا يكــون أمــامنا بعد ذلــك سوى أن نختـــار أساسا مناسبا للجدول ثم نستخلص عدد الأحياء فى كل سن ($ح_{س}$) وعدد الوفيات بين كل سن والسن الذى يليه ($و_{س}$).

ويتم ذلك بإحدى الطريقتين الآتيتين:

الأولى: ويتم فيها إستخلاص عدد الأحياء بالنسبة لكل الأعمار ثم إستخلاص عدد الوفيات بالنسبة لكل الأعمار تأسيسا على العلاقات الآتية:

١ – $\therefore ل_{س} = \dfrac{ح_{س+١}}{ح_{س}}$

$\therefore ح_{س+١} = ح_{س} \times ل_{س}$

، $ح_{س+٢} = ح_{س+١} \times ل_{س+١}$

وهكذا حتى نهاية الجدول.

٢- طالما تعرفنا على قيم $ح_{س}$ فيمكن معرفة قيم $و_{س}$، حيث أن:

$و_{س} = ح_{س} - ح_{س+١}$

، $و_{س+١} = ح_{س+١} - ح_{س+٢}$

وهكذا حتى نهاية الجدول.

الثانية: ويتم فيها إستخلاص عددالوفيات للعمر(س)ثم عدد الأحياء لذات العمر، ثم إستخلاص عدد الوفيات للعمر (س+١) ثم عدد الأحياء لذات العمر. وهكذا حتى نهاية الجدول وفقا للعلاقات والتتابع التالى:

١- $و_{س} = ف_{س} \times ح_{س}$

، $ح_{س+١} = ح_{س} - و_{س}$

٢- $و_{س+١} = ف_{س+١} \times ح_{س+١}$

، $ح_{س+٢} = ح_{س+١} - و_{س+١}$

وهكذا حتى نهاية الجدول.

مثال ١: أسفرت الخبرة الإحصائية التى توافرت لدى إحدى الهيئات التأمينية فى الفترة من أول عام ١٩٩٤ إلى أول عام ١٩٩٧ عن أن معدلات الوفاة فى الألف للأعمار ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠ كانت على التوالى ١,٤٢، ١,٤٣، ١,٤٥، ١,٤٨، ١,٥٤، ١,٥٥.

والمطلوب إعداد جدول حياة يبين عدد الأحياء وعدد الوفيات وإحتمالات الحياة والوفاة السنوية لكل من الأعمار السابقة بإفتراض رقم المليون أساسا للجدول.

الحل

١- يتم تكوين عمود إحتمالات الحياة($ل_{س}$) من خلال العلاقة الآتية:

$ل_{س} = ١ - ف_{س}$

وبهذا نستخلص بيانات هذا العمود على النحو التالى:

س	ح س	وس	ف س	ل س
٢٥	١٠٠٠٠٠٠		٠,٠٠١٤٢	٠,٩٩٨٥٨
٢٦			٠,٠٠١٤٣	٠,٩٩٨٥٧
٢٧			٠,٠٠١٤٥	٠,٩٩٨٥٥
٢٨			٠,٠٠١٤٨	٠,٩٩٨٥٢
٢٩			٠,٠٠١٥٤	٠,٩٩٨٤٦
٣٠			٠,٠٠١٥٥	٠,٩٩٨٤٥

٢- يتم تكوين عمود عدد الأحياء ($ح_{س}$) بإستخدام العلاقة:

$ح_{س+١} = ح_{س} \times ل_{س}$

، $ح_{س+٢} = ح_{س+١} \times ل_{س+١}$ وهكذا على النحو التالى:

س	$ح_{س}$	$و_{س}$	$ف_{س}$	$ل_{س}$
٢٥	١٠٠٠٠٠٠			٠,٩٩٨٥٨
٢٦	٩٩٨٥٨٠			٠,٩٩٨٥٧
٢٧	٩٩٧١٥٢			٠,٩٩٨٥٥
٢٨	٩٩٥٧٠٦			٠,٩٩٨٥٢
٢٩	٩٩٤٢٣٢			٠,٩٩٨٤٦
٣٠	٩٩٢٧٠١			٠,٩٩٨٤٥

٣- يتم بعد ذلك تكوين عمود عدد الوفيات بإستخدام العلاقة:

$و_{س} = ح_{س} - ح_{س+١}$

، $و_{س+١} = ح_{س+١} - ح_{س+٢}$

وبهذا يكتمل الجدول المطلوب كالآتى:

س	ح س	وس	ف س	ل س
٢٥	١٠٠٠٠٠٠	١٤٢٠	٠,٠٠١٤٢	٠,٩٩٨٥٨
٢٦	٩٩٨٥٨٠	١٤٢٨	٠,٠٠١٤٣	٠,٩٩٨٥٨
٢٧	٩٩٧١٥٢	١٤٤٦	٠,٠٠١٤٥	٠,٩٩٨٥٥
٢٨	٩٩٥٧٠٦	١٤٧٤	٠,٠٠١٤٨	٠,٩٩٨٥٢
٢٩	٩٩٤٢٣٢	١٥٣١	٠,٠٠١٥٤	٠,٩٩٨٤٦
٣٠	٩٩٢٧٠١	١٥٣٩	٠,٠٠١١٥	٠,٩٩٨٤٥
٣١	٩٩١١٦٢			

مثال ٢: إستخلص من الجدول الخاص بالمثال السابق (ح٣١) ثم إستكمل بيانات هذا الجدول لكل من الأعمار ٣١، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥ بـــإفتراض أن إحتمـــالات الحيـــاة لتـلـك الأعمـــار كـــالآتى: ٠,٩٩٨٤٢، ٠,٩٩٨٣٩، ٠,٩٩٨٢٣، ٠,٩٩٨٠١، ٠,٩٩٧٨٣.

الحـــل

يستفاد من الجدول المبين بالمثال السابق أن ح٣٠= ٩٩٢٧٠١، وأن $ل_{٣٠}$ = ٠,٩٩٨٤٥.

وحيث أن $ح_{٣١} = ح_{٣٠} \times ل_{٣٠}$

∴ $ح_{٣١}$ = ٩٩٢٧٠١ × ٠,٩٩٨٤٥

= ٩٩١١٦٢

ويتم البدء بتكوين عمود إحتمالات الوفاة ($ف_{س}$) من خلال العلاقة التالية:

$ف_{س} = ١ - ل_{س}$

وبهذا نستخلص عمود فس على النحو التالى:

س	ح س	وس	ف س	ل س
٣١	٩٩١١٦٢		٠,٠٠١٥٨	٠,٩٩٨٤٢
٣٢			٠,٠٠١٦١	٠,٩٩٨٣٩
٣٣			٠,٠٠١٧٧	٠,٩٩٨٢٣
٣٤			٠,٠٠١٩٩	٠,٩٩٨٠١
٣٥			٠,٠٠٢١٧	٠,٩٩٧٨٣

وإذا كنا قد بدأنا فى المثال السابق بإستخلاص بيانات عمود عدد الأحياء ثم بيانات عمود عدد الوفيات فإنه يمكن إستخلاص عدد الوفيات ثم عدد الأحياء وفقا للتابع التالى:

و ٣١ = ف٣١ × ح٣١
= ٠,٠٠١٥٨ × ٩٩١١٦٢
= ١٥٦٦

، ح ٣٢ = ح٣١ — و٣١
= ٩٩١٦٢ ــ ١٥٦٦
= ٩٨٩٥٩٦

ثم و٣٢ = ف٣٢ × ح٣٢
= ٠,٠٠١٦١ × ٩٨٩٥٩٦
= ١٥٩٣

، ح٣٣ = ح٣٢ - و٣٢
= ٩٨٩٥٩٦ × ١٥٩٣
= ٩٨٨٠٠٣

ثم و٣٣ = ف٣٣ × ح٣٣
= ٠,٠٠١٧٧ × ٩٨٨٠٠٣
= ١٧٤٩

، ح٣٤ = ح٣٣ - و٣٣
= ٩٩٨٠٠٣ × ١٧٤٩
= ٩٨٦٢٥٤

ثم و٣٤ = ف٣٤ × ح٣٤

= ٠,٠٠١٩٩ × ٩٨٦٢٥٤

= ١٩٦٣

، ح٣٥ = ح٣٤ - و٣٤

= ٩٨٦٢٥٤ ــ ١٩٦٣

= ٩٨٤٢٩١

وأخيرا فإن و٣٥= ف٣٥ × ح٣٥

= ٠,٠٠٢١٧ × ٩٨٤٢٩١

= ٢١٣٦

وبهذا نصل إلى إستكمال بيانات الجدول المطلوب وفقا للمبين فيما يلى:

س	ح س	وس	ف س	ل س
٣١	٩٩١١٦٢	١٥٦٦	٠,٠٠١٥٨	٠,٩٩٨٤٢
٣٢	٩٨٩٥٩٦	١٥٩٣	٠,٠٠١٦١	٠,٩٩٨٣٩
٣٣	٩٨٨٠٠٣	١٧٤٩	٠,٠٠١٧٧	٠,٩٩٨٢٣
٣٤	٩٨٦٢٥٤	١٩٦٣	٠,٠٠١٩٩	٠,٩٩٨٠١
٣٥	٩٨٤٢٩١	٢١٣٦	٠,٠٠٢١٧	٠,٩٩٧٨٣

أعمدة أخرى لجدول الحياة:

لا يقتصر جـدول الحيـاة علـى بيانـات الأعمـدة الخمسـة السابق إيضاحها بل إن الجدول الكامل يتضمن بيانات أعمـدة أخـرى علـى النحو التالى:

١- وطأة الوفاة Force of Mortality أو المعدل اللحظى للوفاة عند السن س (u س ويرمز له دوليا بالرمز ux):

ويقصد بذلك المعدل السنوى الإسمى للوفاة Nominal annual Rate بفرض أن شدة الوفاة intensity of Mortality تظل فى كل لحظة من لحظـات الفتـرة مـن العمـر س وحتـى العمر س+١ ثابتة ومساوية لشدتها عند اللحظة التى تلى السن س مباشرة.

٢- توقع الحياة Expection of Life : لشخص فى تمام السن س (ت^{o} س ورمزه الدولى $\overset{o}{e}_x$) [١]:

ويقصد بذلك متوسط عدد السنوات التى يعيشها شخص فى تمام السن س بعد هذا السن.

فإذا أهملت كسور السنوات التى يعيشها الشخص بعد تمام السن س فيطلق على توقع الحياة عبارة توقع الحياة الناقص (ت س ورمزه الدولى e_x)[٢].

ويفيد توقع الحياة فى المقارنة بين جداول الحياة المختلفة.

٣- عدد السكان الثابتين الذين تتراوح أعمارهم بين تمام السن س وتمام السن س+١ فى أى لحظة من الزمن (ح س والرمز الدولى L_x).

هذا ويقصد بالمجتمع أو السكان الثابتين Stationary Population أولئك الذين يتميزون بالثبات سواء بالنسبة للعدد الإجمالى، أو بالنسبة لكل من فئات العمر وهو ما يتحقق إذا ما إفترضنا إنعدام الهجرة الداخلية والخارجية وتساوى عدد الوفيات السنوى مع عدد المواليد السنوى وعدد الوفيات فى أية لحظة مع عدد المواليد فى ذات اللحظة، وهو ما يستلزم ثبات عدد المواليد السنوى وتوزيعه توزيعا منتظما، وخضوع عدد الوفيات لجدول حياة معين لا تؤثر فيه حروب أو أوبئة أو ما شابه ذلك.

٤- عدد السكان الثابتين فى تمام السن س أو فى سن أعلى من س، أى الذين لا تقل أعمارهم عن السن س (مجـ ح س والرمز الدولى l_x).

وبهذا فإن مجـ ح س = ح س + ح س+١ + ح س+٢ + ...

---

(١) ت^{o} س = ت س + ١/٢.

(٢) ت س = (ح س+١ + ح س+٢ + ... + ح ∞-١) / ح س

أهم الجداول المستخدمة:

تقوم هيئات التأمين المصرية بإستخدام جداول حياة أجنبية (جدول الخبرة البريطانى ٤٩-١٩٥٢) وقد تجرى تعديلات عليها بما يتفق مع الرؤية الخاصة للخبراء الإكتواريين، ولعله تكون قد توافرت لدينا الخبرة الإحصائية المناسبة والتى تكفى لتكوين جدول أو جداول حياة محلية تساهم مساهمة فعالة فى تطوير تأمينات الحياة فى مصر (١).

ولا شك أنه قد توافرت لدى هيئات التأمين الإجتماعى الخبرة الإحصائية اللازمة لتكوين جدول خاص للحياة بقليل من الجهد (٢)، وعلى صعيد قطاع التأمين التجارى يمكن لشركات التأمين تحقيق ذلك أيضا إذا ما تضافرت جهود الشركات العامة الثلاثة، وتعاونها قائم من خلال الإتحادات، وقد أثبتت إمكانية ذلك إحدى الرسائل المقدمة لجامعة القاهرة لنيل درجة الدكتوراه فى التأمين (٣).

وحيث يستخدم حاليا فىمصرجدول الحياة الإنجليزى ult ٥٢-٤٩ A ، فإننا نورد بيانات الأعمدة الخمسة الأولى منه على الصفحات التالية لنتخذها أساسا لحساب إحتمالات الحياة فى التأمين على الحياة(٤،٥).

ويبدأ الجدول بالعمر ١٠ وبأساس ٩٩٩٩٩٩ وينتهى الجدول بعدد أحياء ٧٢٦ أمام السن. وهكذا يفترض إنتهاء الرقم الأساسى للجدول عند السن ١٠١.

---

(١) راجع فى هذا رسالة الدكتوراه التى تقدم بها لجامعة القاهرة الزميل الدكتور إبراهيم المهدى.

(٢) من واقع الخبرة التى توافرت لنظام المعاش الحكومى عن المدة من ١٩٢٢ إلى ١٩٢٨ قام مستر كريج الخبير بوزارة المالية وقتئذ بإعداد جدول للحياة.

(٣) راجع رسالة الزميل الدكتور إبراهيم المهدى.

(٤) ظهر أول جدول حياة عام ١٨٤٣ من واقع خبرة ١٧ شركة وفى عام ١٨٦٩ نشرت مجموعة جداول الخبراء الإكتواريين ومن واقع الخبرة الإحصائية لثلاثين عاما من ١٨٦٣ إلى ١٨٩٣ تم إعداد مجموعة جداول رؤساء التأمين وفى عام ١٩٢٤ نشرت مجموعة جداول خبراء التأمين عن أصحاب دفعات المعاش ومن واقع الخبرة الإحصائية لعشرين عاما من ١٩٠٠ إلى ١٩٢٠ صدرت مجموعة جداول التأمين عن ذوى المعاشات الحكومية.

(٥) من واقع خبرة شركات التأمين الأمريكية نشر أول جدول خبرة أمريكى فى عام ١٨٦٨، ثم تم إعداد الجدول الأمريكى للفترة من ١٨٤٤ إلى ١٨٧٤ والجدول الأمريكى للرجال للفترة من ١٩٠٠ إلى ١٩١٥ وفى عام ١٩٤١ نشر جدول رؤساء التأمين الموحد العادى لعام ١٩٤١ من واقع خبرة السنوات من ١٩٣٠ إلى ١٩٣٩ ثم نشر جدول ذوى المعاشات الذكور لعام ١٩٤٩.

*الجدول الإنجليزى A ٤٩-٥٢ ult

العمر X	عدد الأحياء ح س L_X	عدد الوفيات وس d_x	إحتمال الوفاة ف س q_x	إحتمال الحياة ل س p_x	توقع الحياه ت س e_x
١٠	٩٩٩٩٩٩	١١١٠	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٦١,٤٠٩
١١	٩٩٨٨٨٩	١١٠٩	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٦٠,٤٧٧
١٢	٩٩٧٧٨٠	١١٠٨	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٩,٥٤٤
١٣	٩٩٦٦٧٢	١١٠٦	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٨,٦١١
١٤	٩٩٥٥٦٦	١١٠٥	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٧,٦٧٦
١٥	٩٩٤٤٦١	١١٠٤	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٦,٧٤٠
١٦	٩٩٣٣٥٧	١١٠٣	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٥,٨٠٣
١٧	٩٩٢٢٥٤	١١٠١	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٤,٨٦٠
١٨	٩٩١١٥٣	١١٠٠	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٣,٩٢٦
١٩	٩٩٠٠٥٣	١٠٩٩	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٢,٩٨٦
٢٠	٩٨٨٩٥٤	١٠٩٨	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٢,٠٤٥
٢١	٩٨٧٨٥٦	١٠٩٧	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥١,١٠٢
٢٢	٩٨٦٧٥٩	١٠٩٥	٠,٠٠١١١	٠,٩٩٨٨٩	٥٠,١٥٩
٢٣	٩٨٥٦٦٤	١١٠٤	٠,٠٠١١٢	٠,٩٩٨٨٨	٤٩,٢١٥
٢٤	٩٨٤٥٦٠	١١٠٣	٠,٠٠١١٢	٠,٩٩٨٨٨	٤٨,٢٧٠
٢٥	٩٨٣٤٥٧	١١٠١	٠,٠٠١١٢	٠,٩٩٨٨٨	٤٧,٣٢٤
٢٦	٩٨٢٣٥٦	١١١٠	٠,٠٠١١٣	٠,٩٩٨٨٧	٤٦,٣٧٧
٢٧	٩٨١٢٤٦	١١٠٩	٠,٠٠١١٣	٠,٩٩٨٨٧	٤٥,٤٣٠
٢٨	٩٨٠١٣٧	١١١٧	٠,٠٠١١٤	٠,٩٩٨٨٦	٤٤,٤٨١
٢٩	٩٧٩٠٢٠	١١٢٦	٠,٠٠١١٥	٠,٩٩٨٨٥	٤٣,٥٣٢
٣٠	٩٧٧٨٩٤	١١٣٤	٠,٠٠١١٦	٠,٩٩٨٨٤	٤٢,٥٨٢
٣١	٩٧٦٧٦٠	١١٥٣	٠,٠٠١١٨	٠,٩٩٨٨٢	٤١,٦٣٢
٣٢	٩٧٥٦٠٧	١١٧١	٠,٠٠١٢٠	٠,٩٩٨٨٠	٤٠,٦٨١
٣٣	٩٧٤٤٣٦	١١٩٩	٠,٠٠١٢٣	٠,٩٩٨٧٧	٣٩,٧٣٠
٣٤	٩٧٣٢٣٧	١٢٣٦	٠,٠٠١٢٧	٠,٩٩٨٧٣	٣٨,٧٧٩

العمر X	عدد الأحياء ح س L_X	عدد الوفيات وس d_x	إحتمال الوفاة ف س q_x	إحتمال الحياة ل س p_x	توقع الحياه ت س e_x
٣٥	٩٧٢٠٠١	١٢٨٣	٠,٠٠١٣٢	٠,٩٩٨٦٨	٣٧,٨٢٨
٣٦	٩٧٠٧١٨	١٣٤٩	٠,٠٠١٣٩	٠,٩٩٨٦١	٣٦,٨٧٨
٣٧	٩٦٩٩٦٩	١٤٢٥	٠,٠٠١٤٧	٠,٩٩٨٥٣	٣٥,٩٢٩
٣٨	٩٦٧٩٤٤	١٥٢٩	٠,٠٠١٥٨	٠,٩٩٨٤٢	٣٤,٩٨٢
٣٩	٩٦٦٤١٥	١٦٥٣	٠,٠٠١٧١	٠,٩٩٨٢٩	٣٤,٠٣٧
٤٠	٩٦٣٧٦٢	١٨١٤	٠,٠٠١٨٨	٠,٩٩٨١٢	٣٣,٠٩٦
٤١	٩٦٢٩٤٨	٢٠٠٣	٠,٠٠٢٠٨	٠,٩٩٧٩٢	٣٢,١٥٨
٤٢	٩٦٠٩٤٥	٢٢٢٠	٠,٠٠٢٣١	٠,٩٩٧٦٩	٣١,٢٢٥
٤٣	٩٥٨٧٢٥	٢٤٨٣	٠,٠٠٢٥٩	٠,٩٩٧٩١	٣٠,٢٩٧
٤٤	٩٥٦٢٤٢	٢٧٩٢	٠,٠٠٢٩٢	٠,٩٩٧٠٨	٢٩,٣٧٦
٤٥	٩٥٣٤٥٠	٣١٣٦	٠,٠٠٣٣١	٠,٩٩٦٧٠	٢٨,٤٦٢
٤٦	٩٥٠٣٠٤	٣٥٣٥	٠,٠٠٣٧٢	٠,٩٩٦٢٨	٢٧,٥٥٦
٤٧	٩٤٦٧٦٩	٣٩٧٦	٠,٠٠٤٢٠	٠,٩٩٥٨٠	٢٦,٦٥٩
٤٨	٩٤٢٧٩٣	٤٤٦٩	٠,٠٠٤٧٤	٠,٩٩٥٢٦	٢٥,٧٧٢
٤٩	٩٣٨٣٢٤	٥٠١١	٠,٠٠٥٣٤	٠,٩٩٤٦٦	٢٤,٨٩٤
٥٠	٩٣٣٣١٣	٥٥٩١	٠,٠٠٥٩٩	٠,٩٩٤٠١	٢٤,٠٢٨
٥١	٩٢٧٧٢٢	٦٢٢٥	٠,٠٠٦٧١	٠,٩٩٣٢٩	٢٣,١٧٣
٥٢	٩٢١٤٩٧	٦٩١١	٠,٠٠٧٥٠	٠,٩٩٢٥٠	٢٢,٣٢٩
٥٣	٩١٤٥٨٦	٧٦٥٥	٠,٠٠٨٣٧	٠,٩٩١٦٣	٢١,٤٩٨
٥٤	٩٠٦٩٣١	٨٤٤٤	٠,٠٠٩٣١	٠,٩٩٠٦٩	٢٠,٦٨٠
٥٥	٨٩٨٤٨٧	٩٢٩٩	٠,٠١٠٣٥	٠,٩٨٩٦٥	١٩,٨٧٤
٥٦	٨٨٩١٨٨	١٠٢٠٨	٠,٠١١٤٨	٠,٩٨٨٥٢	١٩,٠٨٢
٥٧	٨٧٨٩٨٠	١١١٨١	٠,٠١٢٧٢	٠,٩٨٧٢٨	١٨,٣٠٣
٥٨	٨٦٧٧٩٩	١٢٢١٩	٠,٠١٤٠٨	٠,٩٨٥٩٢	١٧,٥٣٩
٥٩	٨٥٥٥٨٠	١٣٣٢١	٠,٠١٥٥٧	٠,٩٨٤٤٣	١٦,٧٩٠

تابع الجدول الإنجليزى A ٤٩-٥٢ ult

العمر X	عدد الأحياء ح س L_X	عدد الوفيات وس d_x	إحتمال الوفاة ف س q_x	إحتمال الحياة ل س p_x	توقع الحياه ت س e_x
٦٠	٨٤٢٢٥٩	١٤٤٨٧	٠,٠١٧٢٠	٠,٩٨٢٨٠	١٦,٠٥٥
٦١	٨٢٧٧٧٢	١٥٧١٩	٠,٠١٨٩٩	٠,٩٨١٠١	١٥,٣٣٦
٦٢	٨١٢٠٥٣	١٧٠٢١	٠,٠٢٠٩٦	٠,٩٧٩٠٤	١٤,٦٣٣
٦٣	٧٩٥٠٣٢	١٨٣٨١	٠,٠٢٣١٢	٠,٩٧٦٨٧	١٣,٩٤٦
٦٤	٧٧٦٦٥١	١٩٧٩٧	٠,٠٢٥٤٩	٠,٩٧٤٥١	١٣,٤٧٦
٦٥	٧٥٦٨٥٤	٢١٢٦٨	٠,٠٢٨١٠	٠,٩٧١٩٠	١٢,٦٢٤
٦٦	٧٣٥٥٨٦	٢٢٧٦٦	٠,٠٣٠٩٥	٠,٩٦٩٠٥	١١,٩٨٩
٦٧	٧١٢٨٢٠	٢٤٣٠٠	٠,٠٣٤٠٩	٠,٩٦٥٩١	١٠,٣٧٢
٦٨	٦٨٨٥٢٠	٢٥٨٤٠	٠,٠٣٧٥٣	٠,٩٦٢٤٧	١٠,٧٧٣
٦٩	٦٦٢٦٨٠	٢٧٣٦٩	٠,٠٤١٣٠	٠,٩٥٨٧٠	١٠,١٩٣
٧٠	٦٣٥٣١١	٢٨٨٦٢	٠,٠٤٥٤٣	٠,٩٥٤٥٧	٩,٦٣٢
٧١	٦٠٦٤٤٩	٣٠٢٩٢	٠,٠٤٩٩٥	٠,٩٥٠٠٥	٩,٠٩١
٧٢	٥٧٦١٥٧	٣١٦٢٥	٠,٠٥٤٨٩	٠,٩٤٥١١	٨,٥٦٨
٧٣	٥٤٤٥٣٢	٣٢٨٢٤	٠,٠٦٠٢٨	٠,٩٣٩٧٢	٨,٠٦٦
٧٤	٥١١٧٠٨	٣٣٨٥٥	٠,٠٦٦١٦	٠,٩٣٣٨٤	٧,٥٨٣
٧٥	٤٧٧٨٥٣	٣٤٦٧٨	٠,٠٧٢٥٧	٠,٩٢٧٤٣	٧,١٢١
٧٦	٤٤٣١٧٥	٣٥٢٤٦	٠,٠٧٩٥٣	٠,٩٢٠٤٧	٦,٦٧٨
٧٧	٤٠٧٩٢٩	٣٥٥٢٧	٠,٠٨٧٠٩	٠,٩١٢٩١	٦,٢٥٥
٧٨	٣٧٢٤٠٢	٣٥٤٨٢	٠,٠٩٥٢٨	٠,٩٠٤٧٢	٥,٨٥٢
٧٩	٣٣٦٩٢٠	٣٥٠٨٧	٠,١٠٤١٤	٠,٨٩٥٨٦	٥,٤٦٨
٨٠	٣٠١٨٣٣	٣٤٣١٥	٠,١١٣٦٩	٠,٨٨٦٣١	٥,١٠٤
٨١	٢٦٧٥١٨	٣٣١٦٤	٠,١٢٣٩٧	٠,٨٧٦٠٣	٤,٧٥٨
٨٢	٢٣٤٣٥٤	٣١٦٣٨	٠,١٣٥٠٠	٠,٨٦٥٠٠	٤,٤٥٢
٨٣	٢٠٢٧١٦	٢٩٧٦١	٠,١٤٦٨١	٠,٨٥٣١٩	٤,١٢٣
٨٤	١٧٢٩٥٥	٢٧٥٧٢	٠,١٥٩٤٣	٠,٨٤٠٥٨	٣,٨٣٣

تابع الجدول الإنجليزى A ٤٩-٥٢ ult

العمر X	عدد الأحياء ح س L_x	عدد الوفيات وس d_x	إحتمال الوفاة ف س q_x	إحتمال الحياة ل س p_x	توقع الحياه ت س e_x
٨٥	١٤٥٣٨٣	٢٥١٢٥	٠,١٧٢٨٢	٠,٨٢٧٠٨	٣,٥٦٠
٨٦	١٢٠٤٥٨	٢٢٤٩٣	٠,١٨٧٠٤	٠,٨١٢٩٦	٣,٣٠٣
٨٧	٩٧٧٦٥	١٩٧٥٣	٠,٢٠٢٠٥	٠,٧٩٧٩٥	٣,٠٦٣
٨٨	٧٨٠١٢	١٦٩٩٥	٠,٢١٧٨٥	٠,٧٨٢١٥	٢,٨٣٩
٨٩	٦١٠١٧	١٤٣٠٢	٠,٢٣٤٤٠	٠,٧٦٥٦٠	٢,٦٢٩
٩٠	٤٦٧١٥	١١٧٥٧	٠,٢٥١٦٨	٠,٧٤٨٣٢	٢,٤٣٥
٩١	٣٤٩٥٨	٩٤٢٦	٠,٢٦٩٦٣	٠,٧٣٠٣٧	٢,٢٥٣
٩٢	٢٥٥٣٢	٧٣٥٨	٠,٢٨٨١٩	٠,٧١١٨١	٢,٠٨٥
٩٣	١٨١٧٤	٥٥٨٥	٠,٣٠٧٣٠	٠,٦٩٢٧٠	١,٩٢٩
٩٤	١٢٥٨٩	٤١١٥	٠,٣٢٦٨٨	٠,٦٧٣١٢	١,٧٨٢
٩٥	٨٤٧٤	٢٩٣٩	٠,٣٤٦٨٣	٠,٦٥٣١٧	١,٦٥٢
٩٦	٥٥٣٥	٢٠٣٢	٠,٣٦٧٠٦	٠,٦٣٢٩٤	١,٥٣٠
٩٧	٣٥٠٣	١٣٥٨	٠,٣٨٧٤٧	٠,٦١٢٥٣	١,٤١٧
٩٨	٢١٤٥	٨٧٥	٠,٤٠٧٩٠	٠,٥٩٢٠٥	١,٣١٣
٩٩	١٢٧٠	٥٤٤	٠,٤٢٨٤٠	٠,٥٧١٦٠	١,٢١٨
١٠٠	٧٢٦	٧٢٦	١,٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠	
٠,٠٠٠					

المطلب الثانى

إحتمالات التأمين على الحياة

تمهيد:

تبين لنا من دراسة جداول الحياة أن هناك عمودين لبيان إحتمال الحياة وإحتمال الوفاة للشخص خلال سنة واحدة، ونعنى بذلك إحتمال الحياة السنوى (ح س) وإحتمال الوفاة السنوى (ف س).

على أن جداول الحياة يمكن إستخدامها لقياس إحتمالات الحياة والوفاة لعدة سنوات لاحقة لسن الشخص مباشرة، أو بعد إنقضاء عدد من السنوات أى أن إستخدامها لا يقتصر على قياس إحتمالات الحياة والوفاة للشخص خلال سنة واحدة بل أيضا خلال عدد من السنوات، وبالتالى يمكن إستخدامها لقياس إحتمالات الحياة لعدد من السنوات ثم الوفاة خلال السنة التالية أو خلال عدد آخر من السنوات التالية.

ومن ناحية أخرى فإن جداول الحياة يمكن إستخدامها لقياس إحتمالات الحياة والوفاة لشخصين (أو أكثر) فى نفس الوقت، فتستخدم لقياس إحتمال حياتهما أو وفاتهما معا، أو إحتمال حياة أولهما ووفاة الثانى، أو إحتمال وفاة الثانى وحياة الأول، أو إحتمال حياة أو وفاة واحد فقط أو واحد على الأقل.

وعلـى هـذا النحو فإننـا نتنـاول فى هذا المطلب إحتمالات التأمين على الحياة من خلال إحتمالات الحياة والوفاة لشخص واحد ولشخصين .

إحتمالات الحياة والوفاة لشخص واحد فى تمام السن (س)

يستفاد من عمودى إحتمال الحياة السنوى وإحتمال الوفاة السنوى ما يلى:

١- إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) يعيش لمدة سنة واحدة أى حتى يبلغ تمام السن (س+١) يرمز له برمز (ل س p_x) ويكون:

$$ل_{س} = \frac{ح_{س+١}}{ح_{س}}$$

٢- إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) يموت خلال سنة واحدة أى قبل بلوغه تمام السن (س+١) ويرمز له برمز (ف س qx) ويكون:

$$ف_{س} = \frac{ح_{س} - ح_{س+١}}{ح_{س}}$$ **(بدلالة عمود عدد الأحياء)**

$$= \frac{و_{س}}{ح_{س}}$$ **(بدلالة عمود عدد الوفيات)**

وطالمــا أن الشخـص الواحـد إما أن يموت خـلال السنة أو يعيـش حتى نهايتها فقد إستخلصنا أن:

$ف_{س} + ل_{س} = ١$ وبالتالى فإن

$ف_{س} = ١ - ل_{س}$، $ل_{س} = ١ - ف_{س}$

ونتناول فيما يلى باقى الإحتمالات:

أولا: إحتمال الحياة لعدد من السنوات (ن ل س np_x)

يقصد بذلك إحتمال حياة شخص فى تمام السن (س) لمدة (ن) من السنوات التالية، أى حتى يبلغ تمام السن (س + ن).

وحيث يستفـاد من عمود عدد الأحيـاء بجداول الحياة أن من بين ($ح_{س}$) من الأشخاص فى تمام السن (س) يعيش ($ح_{س+ن}$) حتى تمام السن (س+ن) .. فإن

$$ن\ ل_{س} = \frac{ح_{س+ن}}{ح_{س}}$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا بإعتبار أن الإحتمال المطلوب عبارة عن إحتمال حياة شخص لمدة سنة واحدة فى كل من الأعمار س، س+١، ...، س+ن-١. وهذه حوادث مشتركة **(أى أن الإحتمال المطلوب يستلزم تحققها فى وقت واحد أو بالتتابع) ومستقلة فى ذات الوقت (بمعنى أن تحقق أحدها مستقل عن تحقق الآخر)، ولذا يطبق مبدأ الإحتمالات المركبة الذى يقضى بضرب هذه الإحتمالات المشتركة المستقلة فيكون:**

$$\text{ن ل}_{\text{س}} = \text{ل}_{\text{س}} \times \text{ل}_{\text{س+1}} \times \text{ل}_{\text{س+2}} \times \dots \times \text{ل}_{\text{س+ن-1}}$$

$$= \frac{\text{ح}_{\text{س+1}}}{\text{ح}_{\text{س}}} \times \frac{\text{ح}_{\text{س+2}}}{\text{ح}_{\text{س+1}}} \times \frac{\text{ح}_{\text{س+3}}}{\text{ح}_{\text{س+2}}} \times \dots \times \frac{\text{ح}_{\text{س+ن}}}{\text{ح}_{\text{س+ن-1}}}$$

$$= \frac{\text{ح}_{\text{س+ن}}}{\text{ح}_{\text{س}}}$$

ثانيا: إحتمال الوفاة خلال عدد من السنوات (ن ف $_{\text{س}}$ $_nq_x$)

يقصد بذلك إحتمال وفاة شخص فى تمام السن (س) خلال (ن) من السنوات التالية، أى قبل بلوغه تمام السن (س+ن).

وحيث يستفاد من عمودى عدد الأحياء وعدد الوفيات بجداول الحياة أى من بين (حس) من الأشخاص فى تمام السن (س) لا يعيش حتى تمام السن (س+ن) سوى (حس+ن)، أى يموت وس+ وس+١+ ... + وس+ن-١ من الأشخاص بين تمام السن س وتمام السن س+ن، فإنه يمكن القول بأن:

$$\text{ن ف س} = \frac{\text{ح}_{\text{س}} - \text{ح}_{\text{س+ن}}}{\text{ح}_{\text{س}}} \quad \text{(بدلالة عمود عدد الأحياء)}$$

$$\text{أو} \quad = \frac{\text{و}_{\text{س}} + \text{و}_{\text{س+1}} + \text{و}_{\text{س+2}} + \dots + \text{و}_{\text{س+ن-1}}}{\text{ح}_{\text{س}}} \quad \text{(بدلالة عمود عدد الوفيات)}$$

ويمكن إثبات ذلك بإعتبار أن الإحتمال المطلوب هو إحتمال وفاة شخص خلال سنة منذ العمر (س) وحتى العمر (س+ن-١)، وبالتالى يطبق مبدأ الإحتمالات المركبة وتكون:

$$\text{ن ف س} = \text{ف س} \times \text{ف}_{\text{س+1}} \times \text{ف}_{\text{س+2}} \times \dots \times \text{ف}_{\text{س+ن-1}}$$

$$= (1 - \text{ل}_{\text{س}})\,(1 - \text{ل}_{\text{س+1}})(1 - \text{ل}_{\text{س+2}}) \dots (1 - \text{ل}_{\text{س+ن-1}})$$

$$= 1 - \text{ن ل}_{\text{س}}$$

$$= 1 - \frac{\text{ح}_{\text{س+ن}}}{\text{ح}_{\text{س}}}$$

$$= \frac{ح_{س} - ح_{س+ن}}{ح_{س}}$$

$$= \frac{و_{س} + و_{س+1} + و_{س+2} + ... + و_{س+ن-1}}{ح_{س}}$$

وقد لاحظنا هنا إن إحتمال وفاة الشخص خلال (ن) من السنوات يساوى ١ - الإحتمال العكسى أى أن:

$ن\ ف_{س} = 1 - ن\ ل_{س}$

وبالمثل فإن..

$ن\ ل\ س = 1 - ن\ ف_{س}$

ثالثا: إحتمال الحياة لعدد من السنوات ثم الوفاة خلال السنة التالية (ن| ف س$n | q_x$):

ويقصد بذلك إحتمال حياة شخص فى تمام السن (س) حتى يبلغ تمام السن (س+ن) ثم يموت خلال السنة التالية، أى بين تمام السن (س+ن) وتمام السن (س+ن+١).

وحيث يستفاد من عمودى عدد الأحياء وعدد الوفيات بجداول الحياة أى من بين ($ح_{س}$) من الأشخاص فى تمام السن (س) يعيش (حس+ن) حتىتمام السن (س+ن) ولا يعيش حتى تمام السن (س+ن+١) سوى ($ح_{س+ن+1}$) حيث يموت ($و_{س+ن}$) من الأشخاص بين تمام السن (س+ن) وتمام السن (س+ن+١)، أى أن:

$$ن\ |\ ف\ س = \frac{ح_{س+ن} - ح_{س+ن+1}}{ح_{س}} \qquad \text{(بدلالة عدد الأحياء)}$$

$$\text{أو} = \frac{و_{س+ن}}{ح_{س}} \qquad \text{(بدلالة عدد الوفيات)}$$

ويمكن البرهنة على ذلك بإعتبار أن الإحتمال المطلوب يتكون من إحتمال حياة شخص لمدة سنة واحدة لكل من الأعمار س، س+١،

س+٢، ... إلى س+ن-١ أى حتى بلوغه تمام السن (س+ن) ثم وفاته خلال سنة أى قبل بلوغه تمام السن (س+ن+١)، وهذه حوادث مشتركة مستقلة يتعين ضربها تطبيقا لمبدأ الإحتمالات المركبة على النحو التالى:

$$\text{ن ف}_{\text{س}} = (\text{ل}_{\text{س}} \times \text{ل}_{\text{س+١}} \times \text{ل}_{\text{س+٢}} \times \ldots \times \text{ل}_{\text{س+ن-١}}) \times \text{ف}_{\text{س+ن}}$$

$$= \text{ن ل}_{\text{س}} \times \text{ف}_{\text{س+ن}}$$

$$= \text{ن ل}_{\text{س}}\,(١ - \text{ل}_{\text{س+ن}})$$

$$= \text{ن ل}_{\text{س}} - (\text{ن ل}_{\text{س}} \times \text{ل}_{\text{س+ن}})$$

$$= \text{ن ل}_{\text{س}} - \left(\frac{\text{ح}_{\text{س+ن}}}{\text{ح}_{\text{س}}} \times \frac{\text{ح}_{\text{س+ن+١}}}{\text{ح}_{\text{س+ن}}}\right)$$

$$= \text{ن ل}_{\text{س}} - \frac{\text{ح}_{\text{س+ن+١}}}{\text{ح}_{\text{س}}}$$

$$= \frac{\text{ح}_{\text{س+ن}} - \text{ح}_{\text{س+ن+١}}}{\text{ح}_{\text{س}}}$$

$$= \frac{\text{و}_{\text{س+ن}}}{\text{ح}_{\text{س}}}$$

وتلاحظ هنا العلاقة الآتية بين إحتمال الوفاة وإحتمال الحياة:

$$\therefore \text{ن} \,|\, \text{ف}_{\text{س}} = \frac{\text{ح}_{\text{س+ن}} - \text{ح}_{\text{س+ن+١}}}{\text{ح}_{\text{س}}}$$

$$\therefore \text{ن} \,|\, \text{ف}_{\text{س}} = \text{ن ل}_{\text{س}} - \text{ن+١ ل}_{\text{س}}$$

رابعا: إحتمال الحياة لعدد من السنوات ثم الوفاة خلال عدد آخر من السنوات التالية (ن| م ف س $n\,|\,{}_mq_x$):

ويقصد بذلك إحتمال حياة شخص فى تمام السن (س) حتى يبلغ تمام السن (س+ن) ثم يتوفى خلال (م) من السنوات التالية وقبل بلوغه تمام السن (س+ن+م).

وحيث يستفاد من عمودى عدد الأحياء وعدد الوفيات من جداول الحياة أى من بين ($ح_{س}$) من الأشخاص فى تمام السن (س) يعـيش ($ح_{س+ن}$) حتى تمام السن (س+ن) ولا يعيش حتى تمام السن (س+ن+م) سوى ($ح_{س+ن+م}$)، أى يموت $و_{س+ن} + و_{س+ن+١} + ... + و_{س+ن+م-١}$، وعلى ذلك فإن:

$$ن|م\ ف_{س} = \frac{ح_{س+ن} - ح_{س+ن+م}}{ح_{س}} \quad \text{(بدلالة عمود الأحياء)}$$

أو

$$= \frac{و_{س+ن} + و_{س+ن+١} + ... + و_{س+ن+م-١}}{ح_{س}} \quad \text{(بدلالة عمود الوفيات)}$$

ويمكن برهنة ذلك بإعتبار أن الإحتمال المطلوب هو إحتمال حياة شخص لمدة سنة واحدة لكل من الأعمار س، س+١، ... إلى س+ن-١، ثم وفاته خلال سنه واحدة لكل من الأعمار س+ن، س+ن+١، ...، إلى س+ن+م-١ أى أنه بتطبيق مبدأ الإحتمالات المركبة للحوادث المستقلة يكون:

$$ن|م\ ف_{س} = (ل_{س} \times ل_{س+١} \times ... \times ل_{س+ن-١})$$
$$(ف_{س+ن} \times ف_{س+ن+١} \times ... \times ف_{س+ن+م-١})$$
$$= ن\ ل_{س} \times م\ ف_{س+ن}$$
$$= ن\ ل_{س}\ (١ - م\ ل_{س+ن})$$
$$= ن\ ل_{س} - (ن\ ل_{س} \times م\ ل_{س+ن})$$
$$= ن\ ل_{س} - \left(\frac{ح_{س+ن}}{ح_{س}} \times \frac{ح_{س+ن+م}}{ح_{س+ن}}\right)$$
$$= ن\ ل\ س - \frac{ح_{س+ن+م}}{ح_{س}}$$
$$= \frac{ح_{س+ن} - ح_{س+ن+م}}{ح_{س}}$$

$$= \frac{و_{س+ن} + و_{س+ن+١} + ... + و_{س+ن+م-١}}{ح_{س}}$$

ويلاحظ هنا العلاقة الآتية بين إحتمال الوفاة وإحتمال الحياة:

$$\therefore \; ن|م\, ف_{س} = \frac{ح_{س+ن} - ح_{س+ن+م}}{ح_{س}}$$

$$\therefore \; ن|م\, ف_{س} = ن\, ل_{س} - ن+م\, ل_{س}$$

الخلاصــة:

الإحتمال المطلوب	بدلالة عمود الأحياء	بدلالة عمود الوفيات
$ل_{س}$	$\frac{ح_{س+١}}{ح_{س}}$	
$ف_{س}$	$\frac{ح_{س} - ح_{س+١}}{ح_{س}}$	$\frac{و_{س}}{ح_{س}}$
$ن\, ل_{س}$	$\frac{ح_{س+ن}}{ح_{س}}$	
$ن\, ف_{س}$	$\frac{ح_{س} - ح_{س+ن}}{ح_{س}}$	$\frac{و_{س} + و_{س+١} + ... + و_{س+ن-١}}{ح_{س}}$
$ن|ف_{س}$	$\frac{ح_{س+ن} - ح_{س+ن+١}}{ح_{س}}$	$\frac{و_{س+ن}}{ح_{س}}$
$ن|م\, ف_{س}$	$\frac{ح_{س+ن} - ح_{س+ن+م}}{ح_{س}}$	$\frac{و_{س+ن} + و_{س+ن+١} + ... + و_{س+ن+م-١}}{ح_{س}}$

لاحظ أن المقام دائما هو $ح_{س}$

وفى مجال العلاقة بين إحتمالات الوفاة والحياة فإن:

$ف_س = ١ - ل_س$ ، $ل_س = ل - ف_س$

، $ن ف_س = ١ - ن ل_س$ ، $ن ل_س = ١ - ن ف_س$

، $ن|ف_س = ن ل_س - ن + ١ ل_س$

، $ن|م ف_س = ن ل_س - ن + م ل_س$

مثال ١: بإستخـدام جـدول الحيـــاة الأمريكى لعـام ١٩٥٨ إحسب الإحتمالات الآتية بالنسبة لشاب فى تمام السن ٣٢ عاما:

١- إحتمال حياته لمدة ٢٨ عاما، أى حتى يبلغ تمام السن ٦٠..

يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ $ل_{٣٢}$ ويكون

$$٢٨ ل٣٢ = \frac{ح_{٣٢+٢٨}}{ح_{٣٢}} = \frac{ح_{٦٠}}{ح٣٢} = \frac{٨٦٩٨٦٩٨}{٩٤٣٩٤٤٧} = ٠,٨١٥٥٩$$

٢- إحتمال وفاته خــلال الـ ٢٨ عــاما التــالية، أى قبل بلوغه تمام السن ٦٠ .. يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ ف٣٢ وهو الإحتمال العكسى لإحتمال حياته حتى سن الستين والمستفاد عاليه:

$$٢٨ ف_{٣٢} = ١ - ٢٨ ل_{٣٢}$$
$$= ١ - ٠,٨١٥٥٩$$
$$= ٠,١٨٤٤١$$

هذا ويمكن التوصل إلى ذات النتيجة بإستخدام عمود عدد الأحياء أو عمود عدد الوفيات بإعتبار أن:

$$ن ف س = \frac{ح_س - ح_{س+ن}}{ح٣٢} = \frac{و_س + و_{س+١} + ... + و_{س+ن-١}}{ح_س}$$

$$\text{أى أن } ٢٨ ف_{٣٢} = \frac{ح_{٣٢} - ح_{٦٠}}{ح_{٣٢}}$$

$$= \frac{٩٤٣٩٤٤٧ - ٧٦٩٨٦٩٨}{٩٤٣٩٤٤٧} = \frac{١٧٤٠٧٤٩}{٩٤٣٩٧٧٤}$$

$$= ٠,١٨٤٤١$$

$$\text{أو} \quad = \frac{و_{٣٢} + و_{٣٣} + ... + و٥٩}{ح_{٣٢}}$$

٣-إحتمـــال حياته لمدة ٢٨ عامــا، أى حــتى تمام السن ٦٠ ثم وفاته خلال السنة التالية..
يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨| ف٣٢
وبإستخدام عمود عدد الوفيات فإن:

$$\text{٢٨} | \text{ف}_{\text{٣٢}} = \frac{\text{و}_{\text{٣٢+٢٨}}}{\text{ح}_{\text{٣٢}}} = \frac{\text{و}_{\text{٦٠}}}{\text{ح}_{\text{٣٢}}} = \frac{\text{١٥٦٥٩٢}}{\text{٩٤٣٩٤٤٧}} = \text{٠,٠١٦٥٩}$$

وذات النتيجة يتــم التــوصل إليهــا بإستخدام عمــود عــدد الأحيــاء بإعتبار أن:

$$\text{ن} | \text{ف}_{\text{س}} = \frac{\text{ح}_{\text{س+ن}} - \text{ح}_{\text{س+ن+١}}}{\text{ح}_{\text{س}}}$$

$$\text{أى أن } \text{٢٨} | \text{ف}_{\text{٣٢}} = \frac{\text{ح}_{\text{٦٠}} - \text{ح}_{\text{٦١}}}{\text{ح}_{\text{٣٢}}} = \frac{\text{٧٦٩٨٦٩٨} - \text{٧٥٤٢١٠٦}}{\text{٩٤٣٩٤٤٧}}$$

$$= \frac{\text{١٥٦٥٩٢}}{\text{٩٤٣٩٤٤٧}} = \text{٠,٠١٦٥٩}$$

كما نصل لذات النتيجة من خلال العلاقة التالية إذا توافرت بياناتها

$$\text{ن} | \text{ف}_{\text{س}} = \text{ن ل}_{\text{س}} - \text{ن+١ ل}_{\text{س}}$$

$$\text{أى أن } \text{٢٨ ف}_{\text{٣٢}} = \text{٢٨ل}_{\text{٣٢}} - \text{٢٩ ل}_{\text{٣٢}}$$

٤- إحتمال حياتــه لمدة ٢٨ عاما أى حتى تمام السن ٦٠ ثم وفاته خلال العشر سنوات التالية.
يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨| ١٠ف٣٢..
وبإستخدام عمود عدد الأحياء فإن:

$$\text{٢٨} | \text{١٠ف٣٢} = \frac{\text{ح}_{\text{٣٢+٢٨}} - \text{ح}_{\text{٣٢+٢٨+١٠}}}{\text{ح}_{\text{٣٢}}} = \frac{\text{ح}_{\text{٦٠}} - \text{ح}_{\text{٧٠}}}{\text{ح}_{\text{٣٢}}}$$

$$= \frac{\text{٧٦٩٨٦٩٨} - \text{٥٥٩٢٠١٢}}{\text{٩٤٣٩٤٤٧}} = \frac{\text{٢١٠٦٦٨٦}}{\text{٩٤٣٩٤٤٧}}$$

$$= \text{٠,٢٢٣١٨}$$

ونصل إلى ذات النتيجة بإستخدام عمود عدد الوفيات حيث يكون:

$$ن| م ف _{س} = \frac{و_{س+ن} + و_{س+ن+1} + ... + و_{س+ن+م-1}}{ح _{س}}$$

$$\text{أى أن } ٢٨ | {}_{١٠}ف_{٣٢} = \frac{و_{٦٠} + و_{٦١} + ... + و_{٦٩}}{ح_{٣٢}}$$

كما نصل إلى النتيجة ذاتها من العلاقة التالية:

$$ن| م ف _{س} = ن ل _{س} - {}_{ن+م} ل _{س} \qquad \text{أى أن}$$

$$٢٨ | {}_{١٠}ف_{٣٢} = ٢٨ل_{٣٢} - ٣٨ ل_{٣٢}$$

مثال ٢: بإستخدام جـدول الحيـاة الأمريكى لعام ١٩٥٨ إحسب الإحتمالات الآتية لفتاة فى تمام السن ٢٥ عاما:

١- إحتمال حياتها لمدة ٣٥ عاما أى حتى تصل تمام السن ٦٠، يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٣٥ل٢٥، وبإستخدام عمود عدد الأحياء فإن:

$$٣٥ل_{٢٥} = \frac{ح_{٢٥+٣٥}}{ح_{٢٥}} = \frac{ح_{٦٠}}{ح_{٢٥}} = \frac{٨١٠٦١٦١}{٩٦٣٠٠٣٩} = ٠,٨٤١٧٦$$

٢- إحتمال وفاتها خلال الـ ٣٥ عاما التالية، أى قبل بلوغها تمام السن ٦٠. يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٣٥ف٢٥ وهو الإحتمال العكسى لإحتمال حياتها لمدة ٣٥ عاما، أى أن:

$$٣٥ف_{٢٥} = ١ - ٣٥ل_{٢٥}$$
$$= ١-٠,٨٤١٧٦$$
$$= ٠,١٥٨٢٤$$

وذات النتيجة يمكن إستخلاصها من عمود عدد الأحياء أو عمود عدد الوفيات بإعتبار أن:

$$٣٥ف_{٢٥} = \frac{ح_{٢٥} - ح_{٦٠}}{ح_{٢٥}} = \frac{٩٦٣٠٠٣٩ - ٨١٠٦١٦١}{٩٦٣٠٠٣٩}$$

= $\frac{١٥٢٣٨٧٨}{٩٦٣٠٠٣٩}$ = ٠,١٥٨٢٤

أو = $\frac{و٢٥ + و٢٦ + ... + و٥٩}{ح٢٥}$

٣- إحتمال حياتهـا لمدة ٣٥ عامـــا أى حتى سن الستين ثم وفاتها خلال السنة التالية.

يرمز لهذا الإحتمـال بالرمز ٣٥| ف٢٥ وبـإستخدام عمود عـدد الوفيات فإن:

٣٥ |ف٢٥ = $\frac{و٢٥+٣٥}{ح٢٥}$ = $\frac{و٦٠}{ح٢٥}$

= $\frac{١٢٥٩٧٠}{٩٦٣٠٠٣٩}$ = ٠,٠١٣٠٨

وذات النتيجة نصل إليها بإستخدام عمود عدد الأحياء ، حيث أن:

ن|ف س= $\frac{ح س+ن – ح س+ن+١}{ح س}$

أى أن ٣٥ف٢٥= $\frac{ح٦٠ - ح٦١}{ح٢٥}$ = $\frac{٨١٠٦١٦١- ٧٩٨٠١٩١}{٩٦٣٠٠٣٩}$

= $\frac{١٢٥٩٧٠}{٩٦٣٠٠٣٩}$ = ٠,٠١٣٠٨

كما نصل إليها من العلاقة الآتية:

ن| ف س = ن ل س - ن+١ ل س أى أن

٣٥|ف٢٥ = ٣٥ل٢٥ - ٣٦ل٢٥

٤- إحتمال حياتها لمدة ٣٥ عاما، أى حتى سن الستين ثم وفاتها خلال العشر سنوات التالية وقبل بلوغها سن السبعين:

يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٣٥| ١٠ف٢٥ وبإستخدام عمود عدد الأحياء فإن:

$$ {}_{35|10}ف_{25} = \frac{ح_{60} - ح_{70}}{ح_{25}} = \frac{٦٣٥٥٨٦٥-٨١٠٦١٦١}{٩٦٣٠٠٣٩} $$

$$ = \frac{١٧٥٠٢٩٦}{٩٦٣٠٠٣٩} = ٠,١٨١٧٥ $$

ونصل إلى ذات النتيجة بإستخدام عمود عدد الوفيات حيث أن:

$$ {}_{35|10}ف_{25} = \frac{و_{60} + و_{61} + ... + و_{69}}{ح_{25}} $$

كما نصل إلى نفس النتيجة من العلاقة الآتية:

$$ {}_{35|10}ف_{25} = {}_{35}ل_{25} - {}_{45}ل_{25} $$

إحتمالات الحياة والوفاة لشخصين فى تمام السن (س) وتمام السن (ص) على التوالى:

أولا: إحتمال حياتهما معا لعدد من السنوات (ن ل س ص)

يقصد بذلك إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) وآخر فى تمام السن (ص) يعيشان لمدة (ن) من السنوات التالية حتى يبلغ الأول تمام السن (س+ن) ويبلغ الثانى تمام السن (ص+ن).

وهكذا فإننا بصدد إحتمالين أولهما هو إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) يعيش لمدة (ن) من السنوات التالية (ن ل س)، والآخر هو إحتمال أن شخصا فى تمام السن (ص) يعيش لذات العدد من السنوات (ن لص)، ولما كان الإحتمال المطلوب يستلزم تحققهما معا فهما إذن مشتركان، وطالما أن حياة كل منهما لا تعتمد على حياة الآخر فهما مستقلان وبالتالى فإنه يتم ضرب الإحتمال الأول فى الإحتمال الثانى لتحديد الإحتمال المطلوب تطبيقا لمبدأ الإحتمالات المركبة للحوادث المشتركة المستقلة.

أى أن ن ل س ص= ن ل س × ن ل ص

ثانيا: إحتمال وفاتهما معا خلال عدد من السنوات (ن ف س ص)

ويقصد بذلك إحتمال أن شخصا فى تمام السن (س) وآخر فى تمام السن (ص) يموتان خلال (ن) من السنوات التالية، أى يموت الأول قبل بلوغه تمام السن (س+ن) ويموت الثانى قبل بلوغه تمام السن (ص+ن).

وهكذا فإننا بصدد إحتمال وفاة شخص فى تمام السن (س) خلال (ن) من السنوات التالية (ن ف س) وفى ذات الوقت إحتمال وفاة شخص آخر فى تمام السن (ص) خلال ذات العدد من السنوات التالية (ن ف ص) وهما حادثان مشتركان مستقلان.

وبتطبيق مبدأ الإحتمالات المركبة يتم ضرب الإحتمال الأول × الإحتمال الثانى .. وهكذا فإن:

ن ف س ص = ن ف س × ن ف ص

أى = (١ -ن ل س) (١- ن ل ص)

ثالثا: إحتمال حياة الشخص الأول لمدة (ن) من السنوات، ووفاة الشخص الثانى خلال ذات المدة (ن ل س ، ن ف ص):

ويقصد بذلك إحتمال حياة الشخص الأول لمدة (ن) من السنوات، أى حتى يصل إلى تمام السن س+ن (ن ل س) وفى ذات الوقت وفاة الشخص الثانى خلال ذات العدد من السنوات، أى قبل بلوغه تمام السن ص+ن (ن ف ص).

وبتطبيق مبدأ الإحتمالات المركبة للإحتمال الشرطى .. فإن:

ن ل س، ن ف ص= ن ل س × ن ف ص

=ن ل س (١ - ن ل ص)

=ن ل س - (ن ل س × ن ل ص)

=ن ل س - ن ل س ص

أى أن إحتمال حياة الشخص الأول لمدة (ن) من السنوات ووفاة الشخص الثانى خلال ذات المدة عبارة عن إحتمال حياة الأول مطروحا منه إحتمال حياتهما معا.

رابعا: إحتمال حياة الشخص الثانى لمدة (ن) من السنوات، ووفاة الشخص الأول خلال ذات المدة (ن ل ص، ن ف س):

ويقصد بذلك إحتمال أن الشخص الثانى هو الذى يعيش لمدة (ن) من السنوات حتى يصل تمام السن ص+ن (ن ل ص) فى حين يتوفى الشخص الأول قبل بلوغه تمام السن س+ن (ن ف س).

وبتطبيق مبدأ الإحتمالات المركبة لإحتمال الشرطى فإن:

ن ل ص، ن ف س = ن ل ص × ن ف س

=ن ل ص (١ - ن ل س)

=ن ل ص - (ن ل ص × ن ل س)

=ن ل ص - ن ل س ص

أى أن إحتمال حياة الشخص الثانى لمدة (ن) من السنوات ووفاة الشخص الأول خلال ذات المدة عبارة عن إحتمال حياة الثانى مطروحا منه إحتمال حياتهما معا.

...هذا والإحتمالات السابقة متنافية فيما بينها وتمثل كافة الحالات الممكنة وبالتالى فإن مجموعها يساوى الواحد الصحيح على النحوالتالى:

=إحتمال حياتهما معا + إحتمال وفاتهما معا + إحتمال حياة الأول ووفاة الثانى + إحتمال وفاة الأول وحياة الثانى.

=ن ل س ص+(١-ن ل س)(١- ن ل ص) + ن ل س - ن ل س ص)

+ (ن ل ص - ن ل س ص).

=ن ل س ص+(١-ن ل س- ن ل ص +ن ل س ص) + ن ل س

- ن ل س ص +ن ل ص - ن ل س ص=١

خامسا: إحتمال حياة واحد فقط لمدة (ن) من السنوات (ن ل (١))
س ص

ويقصد بذلك أحد أمرين:

١- إما إحتمال حياة الأول لمدة (ن) من السنوات حتى بلوغه تمام السن س+ن ووفاة الثانى خلال هذه المدة وقبل بلوغه تمام السن ص+ن (ن لس، ن ف ص).

٢- أو إحتمال حياة الثانى لمدة (ن) من السنوات وحتى بلوغه تمام السن ص+ن ووفاة الأول خلال هذه المدة وقبل بلوغه تمام السن س+ن (ن ل ص، ن ف س).

وهكذا فإن الإحتمال المطلوب عبارة عن إحتمالين رئيسيين متنافيين (أى أن تحقق أحدهما يمتنع معه تحقق الآخر أو يتنافى معه تحقق الآخر) وبالتالى يتم الحصول على الإحتمال المطلوب بجمع هذين الإحتمالين الرئيسيين الذين يتكون كل منهما بدوره من حادثين فرعيين (يتم ضربهما وفقا لمبدأ الإحتمالات المركبة للحوادث المستقلة).

أى أن:

ن ل $\underset{\text{س ص}}{[١]}$ = (ن ل س، ن ف ص) + (ن ل ص، ن ل ص، ن ف س)

=(ن ل س × ن ف ص)+ (ن ل ص × ن ف س)

=ن ل س -ن ل س ص + ن ل ص - ن ل س ص)

أى أن:

ن ل $\underset{\text{س ص}}{[١]}$ = ن ل س+ ن ل ص - ٢ ن ل س ص

سادسا: إحتمال وفاة واحد فقط خلال (ن) من السنوات(ن ف$\underset{\text{س ص}}{(١)}$)

وهذا يساوى تماما إحتمال حياة واحد فقط لمدة (ن) من السنوات أى الإحتمال السابق، حيث أن:

ن ف $\underset{\text{س ص}}{[١]}$ = (ن ف س، ن ل ص) + (ن ف ص، ن ل س)

= (ن ف س × ن ل ص)+ (ن ف ص × ن ل س)

= ن ل ص - ن ل س ص + ن ل س - ن ل س ص

= ن ل س+ ن ل ص - ٢ ن ل س ص

سابعا:إحتمال بقاء واحد على الأقل لمدة(ن)من السنوات ن ل$\underset{\text{س ص}}{١}$

ويقصد بذلك إما:

١-إحتمال حياة الأول لمدة (ن) من السنوات ووفاة الثانى خلال هذه المدة (ن ل س، ن ف ص).

٢- أو على العكس إحتمال حياة الثانى لمدة (ن) من السنوات ووفاة الأول خلال هذه المدة (ن ل ص، ن ف س).

وهذين الإحتمالين عبارة عن إحتمال حياة واحد فقط (ن ل (١))
س ص

٣- أو إحتمال حياتهما معا لمدة (ن) من السنوات (ن ل س ص).

وهكذا فإن الإحتمال المطلوب عبارة عن مجموع ثلاثة إحتمالات رئيسية متنافية، كل منها عبارة عن حادثين فرعيين مستقلين يتم ضربهما للحصول عليه (مبدأ الإحتمالات المركبة والكلية معها).

وبذلك فإن:

ن ل ١ = (ن ل س، ن ف ص) + (ن ل ص، ن ف س)+ن ل س ص
س ص

= ن ل [١] + ن ل س ص
س ص

= ن ل س +ن ل ص - ٢ ن ل س ص+ ن ل س ص

= ن ل س +ن ل ص - ن ل س ص

هذا وحيث أن إحتمال بقاء واحد على الأقل لمدة (ن) من السنوات يعنى إحتمال حياة الأول ووفاة الثانى أو وفاة الثانى وحياة الأول أو حياتهمـــا معا، بمعنى أن الإحتمـــال الوحيد المستثنى هــو إحتمال وفاة الشخصين معا خلال (ن) من السنوات، فإن:

ن ل ١ = ١ - إحتمال وفاتهما معا
س ص

= ١ - ن ف س ص

ويمكن البرهنة على ذلك كما يلى:

ن ل ١ = ن ل س +ن ل ص - ن ل س ص
س ص

= ١ – (١ - ن ل س - ن ل ص + ن ل س ص)

= ١ – (١ - ن ل س)(١ - ن ل ص)

= ١ - ن ف س ص

ثامنا:إحتمال وفاة واحد على الأقل خلال(ن)من السنوات(ن ف ١)
س ص

ويقصد بذلك إما:

١- إحتمال وفاة الأول خلال (ن) من السنوات وحياة الثانى إلى نهاية هذه المدة (ن ف س، ن ل ص).

٢- أو على العكس إحتمال وفاة الثانى خلال (ن) من السنوات وحياة الأول إلى نهاية هذه المدة (ن ف ص، ن ل س).

وهذا هو إحتمال وفاة واحد فقط من الشخصين(ن ف (١))
س ص

٣- أو إحتمال وفاتهما معا (ن ف س ص).

وعلى ذلك فإنه بتطبيق مبدأ الإحتمالات المركبة والكلية معها فإن:

ن ف ١ = (ن ف س، ن ل ص) + (ن ف ص، ن ل س)+ن ف س ص
س ص

= ن ل س +ن ل ص - ٢ ن ل س ص+ ن ف س ص

هذا وطالما أن إحتمال وفاة واحد على الأقل من الشخصين يعنى إستبعاد إحتمال وفاتهما معا ، فإن:

ن ف ١ = ١ - إحتمال حياتهما معا
س ص

= ١ - ن ل س ص

ويمكن البرهنة على ذلك كما يلى:

ن ف ١ = ن ل س +ن ل ص - ٢ ن ل س ص + ن ف س ص
س ص

= ن ل س + ن ل ص - ٢ ن ل س ص + (١ - ن ل س) (١ - ن ل ص)

= ن ل س + ن ل ص - ٢ ن ل س ص + (١ - ن ل س -ن ل ص + ن ل س ص)

= ١ - ن ل س ص

الخلاصة:

ن ل س ص= ن ل س × ن ل ص

ن ف س ص = ن ف س × ن ف ص

= (١ -ن ل س) (١- ن ل ص)

ن ل س، ن ف ص= ن ل س × ن ف ص

=ن ل س - ن ل س ص

ن ل ص، ن ف س = ن ل ص × ن ف س

=ن ل ص - ن ل س ص

والإحتمالات الأربعة السابقة مجموعها واحد صحيح.

٥ -ن ل [١] = ن ف [١]

س ص س ص

= ن ل س+ ن لص - ٢ ن ل س ص

٦ -ن ل ١ = ١ - إحتمال وفاتهما معا

س ص

٧ -ن ف ١ = ١ - إحتمال حياتهما معا

س ص

مثال ٣: بإستخدام جدول الحياة الأمريكى الموحد لعام١٩٥٨ أوجد الإحتمالات الآتية لزوج فى تمام السن ٣٢ وزوجة فى تمام السن ٢٥.

١ -إحتمال حياتهما معا لمدة ٢٨ عاما التالية:

يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ل٣٢ ٢٥

٢٨ل٣٢ ٢٥= ٢٨ل٣٢ × ٢٨ل٢٥

= ح٦٠ / ح٣٢ × ح٥٣ / ح٢٥

= ٧٦٩٨٦٩٨ / ٩٤٣٩٤٤٧ × ٨٧٦٢٣٠٦ / ٩٦٣٠٠٣٩

= ٠,٨١٥٥٩ × ٠,٩٠٩٨٩ = ٠,٧٤٢١٠

٢- إحتمال وفاتهما معا خلال الـ٢٨ عاما التالية:

يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ ف٣٢ ٢٥

٢٨ف ٣٢ ٢٥ = ٢٨ف٣٢ × ٢٨ف٢٥

=(١ - ٢٨ل٣٢) (١ - ٢٨ل٢٥)
= (١- ٠,٨١٥٥٩) (١- ٠,٩٠٩٨٩)
= ٠,١٨٤٤١ × ٠,٠٩٠١١ = ٠,٠١٦٦٢

٣- إحتمال حيـاة الزوج لمـدة الـ٢٨ عامـا التالية ووفـاة الزوجة خلال نفس المدة:
يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ل٣٢، ٢٨ف٢٥
٢٨ل٣٢، ٢٨ف٢٥ = ٢٨ل٣٢ × ٢٨ف٢٥
= ٠,٨١٥٥٩ × ٠,٠٩٠١١ = ٠,٠٧٣٤٩
أو أن ٢٨ل٣٢، ٢٨ف٢٥ = ٢٨ل٣٢ - ٢٨ل٣٢ ٢٥
= ٠,٨١٥٥٩ – ٠,٧٤٢١٠ = ٠,٠٧٣٤٩

٤- إحتمـال حيـاة الزوجـة خلال الـ٢٨ عامـا التالية ووفاة الزوج قبل نـهاية هذه المدة.
يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ل٢٥، ٢٨ف٣٢
٢٨ل٢٥، ٢٨ف٣٢ = ٢٨ل٢٥ × ٢٨ف٣٢
= ٠,٩٠٩٨٩ × ٠,١٨٤٤١ =٠,١٦٧٧٩
أو أن ٢٨ل٢٥، ٢٨ف٣٢ = ٢٨ل٢٥ - ٢٨ل٣٢ ٢٥
= ٠,٩٠٩٨٩ – ٠,٧٤٢١٠ = ٠,١٦٧٧٩
هذا والإحتمالات السابقة..
= ٠,٧٤٢١٠ + ٠,٠١٦٦٢ + ٠,٠٧٣٤٩ + ٠,١٦٧٧٩ = ١

٥- إحتمال حياة واحد فقط من الزوجين لمدة ٢٨ عاما:
يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ل $\underset{\text{٢٥٣٢}}{[\ \text{١}\ ]}$

٢٨ل $\underset{\text{٢٥٣٢}}{[\ \text{١}\ ]}$ = ٢٨ل٣٢+٢٨ل٢٥ - ٢(٢٨ل٣٢ ٢٥)

= ٠,٨١٥٥٩ + ٠,٩٠٩٨٩ – ٢ × ٠,٧٤٢١٠
= ١,٧٢٥٤٨ – ١,٤٨٤٢٠ = ٠,٢٤١٢٨

٦- إحتمال وفاة واحد فقط من الزوجين خلال الـ٢٨ عاما:
يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ف $\underset{\text{٢٥٣٢}}{[\ \text{١}\ ]}$

٢٨ف [١] = ٢٨ل [١] = ٠,٢٤١٢٨
٢٥ ٣٢ ٢٥ ٣٢

٧- إحتمال حياة واحد على الأقل من الزوجين لمدة الـ٢٨ عاما التالية:

يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ل ١
٢٥ ٣٢

٢٨ل ١ = ١- إحتمال وفاتهما معا
٢٥ ٣٢

=١- ٢٨ف٢٣٢ ٢٥ =١ – ٠,٠١٦٦٢ = ٠,٩٨٣٣٨

٨- إحتمال وفاة واحد على الأقل من الزوجين خلال الـ٢٨ عاما التالية:

يرمز لهذا الإحتمال بالرمز ٢٨ف ١
٢٥ ٣٢

٢٨ ف ١ = ١- إحتمال حياتهما معا
٢٥ ٣٢

=١ - ٢٨ ل ٣٢ ٢٥ = ١ - ٠,٧٤٢١٠ = ٠,٢٥٧٩٠

بعض بيانات جدول الخبرة الأمريكى لعام ١٩٥٨

السن x Mal	px Fem	عدد الاحياء ix ح س	عدد الوفيات و س	احتمال الوفاه dx ف س	احتمال الحياه qx ل س
٢٢	٢٥	٩٦٣٠٠٣٩	١٧٩١٢	٠,٠٠١٨٦	٠,٩٩٨١٤
٢٥	٢٨	٩٥٧٥٦٣٦	١٨٤٨١	٠,٠٠١٩٣	٠,٩٩٨٠٧
٣٢	٣٥	٩٤٣٩٤٤٧	٢١٢٣٩	٠,٠٠٢٢٥	٠,٩٩٧٧٥
٥٠	٥٣	٨٧٦٢٣٠٦	٧٢٩٠٢	٠,٠٠٨٣١	٠,٩٩١٦٨
٥٣	٥٦	٨٥٢٤٤٨٦	٩٢٨٣٢	٠,٠١٠٨٩	٠,٩٨٩١١
٥٧	٦٠	٨١٠٦١٦١	١٢٥٩٧٠	٠,٠١٥٥٤	٠,٩٨٤٤٦
٥٨	٦١	٧٩٨٠١٩١	١٣٥٦٦٣	٠,٠١٧٠٠	٠,٩٨٣٠٠
٦٠	٦٣	٧٦٩٨٦٩٨	١٥٦٥٩٢	٠,٠٢٠٣٤	٠,٩٧٩٦٦
٦١	٦٤	٧٥٤٢١٠٦	١٦٧٧٣٦	٠,٠٢٢٢٤	٠,٩٧٧٧٦
٦٧	٧٠	٦٣٥٥٨٦٥	٢٤١٧٧٧	٠,٠٣٨٠٤	٠,٩٦١٩٦
٧٠	٧٣	٥٥٩٢٠١٢	٢٧٨٤٢٦	٠,٠٤٩٧٩	٠,٩٥٠٢١

الفصل الثالث عشر

حساب القسط الوحيد الصافى

-العقـود التى تؤدى مبالغها فى حالة الحـــياة
-العقـود التى تؤدى مبالغها فى حالة الوفـــاة
-العقود المختلطة التى تؤدى مبالغها فى حالة الحياة أو حالة الوفاة

تمهيد :

يفكر الإنسان فى غده إذا ما إمتد به العمر إلى وقت يتعين فيه أن يكون لديه مبلغا من المال لمواجهة إلتزاماته المستقبلة أو لتحقيق مشروعات معينة، كما يفكر الإنسان فى غده حيث يتعين أن يوفر دخلا دوريا لمواجهة نفقات الحياة الدورية، وبهذا فإن الإنسان يتعرض لخطر الحياة وما يستلزمه ذلك من مال دفعة واحدة أو على دفعات.

ومن ناحية أخرى فإن الإنسان يفكر فيمن يعولهم إذا لم يمتد به العمر ويسعى إلى أن يوفر لهم مبلغا أو مبالغ دورية يواجهون بها الحياة إذا ما تحقق خطر الوفاة.

وطالما أن الظروف تختلف من شخص لآخر فإن حاجات البشر وقدراتهم بالنسبة لكل من خطرى الحياة والوفاة تتنوع وتتفاوت مما يؤدى إلى تنوع وثائق التأمين سواء فى ذلك تلك التى تؤدى مبالغها فى حالة الحياة أو تلك التى تؤدى مبالغها فى حالة الوفاة أو تلك التى تجمع بين الأمرين فتؤدى مبالغها فى حالة الحياة أو فى حالة الوفاة وتسمى المختلطة.

ويهتم هذا الفصل بتحديد ما يلتزم به المؤمن له المتعاقد بالنسبة لكل من عقود التأمين التى تؤدى مبالغها فى حالة الحياة فقط أو فى حالة الوفاة فقط أو فى أى من الحالتين، بإفتراض أن إلتزامه لا يتضمن ما يخص عقد التأمين من المصاريف والنفقات الإدارية والإنتاجية وأرباح المؤمن وأنه سيؤدى مرة واحدة بمجرد التعاقد وهو ما يسمى بالقسط الوحيد الصافى.

وطالما أن الحصول على مبلغ التأمين أمر إحتمالى مستقبل فى حين أن ما يسمى بالقسط الوحيد الصافى أمر مؤكد يؤدى حال التعاقد، فإن هذا القسط يتحدد بما يساوى القيمة الحالية للتوقع الرياضى لحصول المستأمن على مبلغ التأمين أى أن :

القسط الوحيد الصافى= القيمة الحالية لمبلغ التأمين
× إحتمال الحصول عليه.

وفى هذا الإطار نتناول فى هذا الفصل حساب ما يسمى بالقسط الوحيد الصافى لكل من الأنواع المختلفة لعقود التأمين على الحياة وذلك فى مباحث ثلاثة، يتم أولها بحساب القسط الوحيد الصافى للعقود التى تؤدى مبالغها فى حالة الحياة، ويهتم الثانى بحساب القسط الوحيد الصافى للعقود التى تؤدى مبالغها فى حالة الوفاة، أما المبحث الثالث والأخير فيهتم بتحديد القسط الوحيد الصافى لعقود التأمين المختلط التى تجمع بين نوع أو أكثر من العقود التى تدفع مبالغها فى حالة الحياة ونوع أو أكثر من العقود التى تدفع مبالغها فى حالة الوفاة .

المبحث الأول
العقود التى تدفع مبالغها فى حالة الحياة

الوقفية البحته- الدفعات لمدى الحياة-
الدفعات المؤقتة

تهتم العقود التى تدفع مبالغها فى حالة الحياة بأداء مبلغ التأمين دفعة واحدة أو على دفعات وذلك طالما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة لفترة محددة أو لمدى الحياة.

وهكذا نتناول فى هذا المبحث حساب القسط الوحيد الصافى لكل من العقود التى تؤدى مبالغها دفعة واحدة عند بلوغ المؤمن عليه سنا معينا أى بعد إنقضاء فترة معينة على التعاقد، وهى التى تسمى بعقود الوقفية البحته.

كما نتناول فى هذا المبحث حساب القسط الوحيد الصافى لكل من العقود التى تؤدى دفعات للمؤمن عليه لفترة مؤقتة أو لمدى الحياة، وهذه قد تكون عاجلة وقد تكون مؤجلة.

وفى كـل هـذا وفـى سبيـل التبسيط فإننا سنتخذ السنوات الكاملة أساسا عند تحديد كل من العمر وفترة أو فترات الإستحقاق.

-عقد الوقفية البحتة:

يقصد بعقد الوقفية البحتة لشخص فى تمام السن س ذلك العقد الذى يلتزم المؤمن بمقتضاه أن يؤدى لذلك الشخص المؤمن عليه مبلغ التأمين إذا ما ظل على قيد الحياة بعد ن من السنوات أى عند بلوغه تمام السن س + ن.

ويرمز للقسـط الوحيد الصافى لهذا العقد، وبإفتراض أن مبلغه جنيه واحد، بالرمز

$$أ\ س: \frac{1}{ن|} \quad Ax: \frac{1}{|n} \quad (أو\ nAx)$$

وحيث أن الأقساط الوحيدة الصافية لهذه العقود تؤدى بمجرد التعاقد فإن من الطبيعى قيام المؤمن بإستثمارها لتحقيق عائد يكفى مع حصيلة تلك الأقساط لتغطية مبالغ التأمين المحتمل أدائها فى المستقبل.

وعلى ذلك فإذا ما إفترضنا أن سن الشخص فى تاريخ التعاقد (س) وأن مبلغ التأمين سيؤدى إلى هذا الشخص إذا ما ظل على قيد الحياة حتى تمام السن (س+ن) وأن معدل الفائدة المفترض تحقيقه (ع) فإن:

القسط الوحيد الصافى

=القيمة الحالية لمبلغ التأمين× إحتمال الحصول عليه

القيمة الحالية لمبلغ التأمين × إحتمال الحياة حتى تمام السن(س+ن)

= مبلغ التأمين × (١+ ع)- ن × ن ل س

= مبلغ التأمين× ح ن × (ح س+ن / ح س)

$$= مبلغ\ التأمين \times \frac{ح\ س+ن\ ح\ ن}{ح\ س}$$

ولتسهيل العمليات الحسابية اللازمة لحساب أقساط التأمين فقد أعد الخبراء الرياضيون جداول لهذا الغرض تسمى بجداول الإستبدال أو الإستعاضة Commutation أو جداول الرموز الحسابية Commutation Sympols.

يعطى العمود الأول منها قيمة:

ح س × ح س ويرمز لها بالرمز دس $Dx= Lx\ Vx$

وعلى ذلك فإذا ما عدنا إلى معادلة تحديد القسط الوحيد الصافى لعقد الوقفيه البحته، وقمنا بضرب البسط والمقام بالطرف الأيسر فى ح س ينتج أنه بالنسبة لكل مبلغ تأمين قدره جنيه واحد فإن:

$$أ\ س: \frac{1}{ن} = \frac{ح\ س+ن\ ح\ ن}{} \times \frac{ح\ س}{}$$

ح س   ح س

$$= \frac{\text{ح س+ن} \ \ \text{ح س+ن}}{\text{ح س ح س}} = \frac{\text{د س+ن}}{\text{د س}}$$

أى أن القسط الوحيد الصافى لعقد وقفية بحتة يؤدى مبلغه لشخص فى تمام السن س إذا ما ظل على قيد الحياة حتى تمام السن س+ ن =

$$\text{مبلغ الوقفية} \times \frac{\text{د للسن فى تاريخ إستحقاق مبلغ الوقفية}}{\text{د للسن فى تاريخ التعاقد}}$$

مثال ١: بإستخدام جدول الرموز الحسابية لجداول الحياة الأمريكى الموحد لعام ١٩٥٨ والمحسوبة على أساس معدل فائدة ٣% ، إحسب القسط الوحيد الصافى لعقد وقفية بحته بمقتضاه تلتزم شركة التأمين بأداء ٢٠٠٠ جنيه لشخص فى تمام السن ٢٥ سنة إذا ما ظل على قيد الحياة بعد ٣٠ سنة.

الحل: ٠,٠ أ س: $\frac{١}{ن|}$ = $\frac{\text{دس+ن}}{\text{دس}}$

٠,٠ أ٢٥: $\frac{١}{٣٠|}$ = $\frac{\text{د٢٥+٣٠}}{\text{د٢٥}}$ = $\frac{\text{د٥٥}}{\text{د٢٥}}$

= $\frac{١٦٣٩٣٢٩,٧}{٤٥٧٣٣٧٧,١}$ = ٠,٣٥٨٤٥١

٠,٠ القسط الوحيد الصافى للوثيقة=٢٠٠٠ ×٠,٣٥٨٤٥١= ٧١٦,٩جنيه

مثال ٢ : بإستخدام جدول الرموز الحسابية لجدول الحياة الأمريكى الموحد لعام ١٩٥٨ (معدل فائدة ٣%) إحسب القسط الوحيد الصافى لعقد وقفية بحته بمبلغ ٣٠٠٠ جنيه تدفع لشخص فى تمام السن ٣٥ عند بلوغه تمام السن ٦٠.

الحل: مدة الوقفية هنا ٢٥ عاما ومبلغها ٣٠٠٠ جنيه والسن فى تاريخ التعاقد ٣٥ عاما ، وعلى ذلك فإن:

القسط الوحيد الصافى للوثيقة

= ٣٠٠٠ × أ٣٥: ١/٢٥| = ٣٠٠٠ × (د٣٥ + ٢٥) / د٣٥

=٣٠٠٠ × (د٦٠ / د٣٥) = ٣٠٠٠ × ١٣٠٦٧٢٣,٨ / ٣٣٣١٢٩٥,٤

= ٣٠٠٠ × ٠,٣٩٢٢٥٧ = ١١٧٦,٧٧ جنيه

مثال ٣: قام شخص فى تمام السن ٣٠ بالتعاقد مع شركة تأمين على أداء مبلغ معين إذا ما ظل على قيد الحياة حتى سن الخمسين وذلك مقابل ٥١١,٧٤٠ جنيه سددت للشركة بمجرد التعاقد كقسط وحيد صافى، فما هو مبلغ التأمين.

الحل: هـذا العقـد عبـارة عن عقـد وقفيـة بحتـه لمدة ٢٠ عاما لشخص فى تمام السن ٣٠ وقيمة القسط الوحيد الصافى ٥١١,٧٤٠ جنيه، وحيث أن:

القسط الوحيد الصافى = مبلغ التأمين × دس+ن / دس

٠,٠ ٥١١,٧٤٠ = مبلغ التأمين × د٥٠ / د٣٠ = مبلغ التأمين × ١٩٩٨٧٤٤ / ٣٩٠٥٧٨٢

= مبلغ التأمين × ٠,٥١١٧٤٠

٠,٠ مبلغ التأمين = ٥١١,٧٤٠ / ٠,٥١١٧٤ = ١٠٠٠ جنيه

-عقود الدفعات السنوية لمدى الحياة *(دفعات المعاش لمدى الحياة):*

نقصد بهذه العقود بالنسبة لشخص فى تمام السن س تلك التى يلتزم فيها المؤمن بأن يؤدى لهذا الشخص دفعات سنوية متساوية طالما ظل على قيد الحياة.

وعادة ما يتفق فى مثل هذه العقود على قيام المؤمن بأداء الدفعات السنوية فى نهاية كل سنة من السنوات التى يظل فيها المؤمن عليه على قيد الحياة، ولذا تسمى بالدفعات العادية، أما إذا إتفق على سداد الدفعات السنوية فى أول كل سنة (من السنوات التى يظل فيها المؤمن عليه على قيد الحياة) فتسمى بالدفعات الفورية.

ومن ناحية أخرى فمن المعتاد أن يفكر الشخص فى ضمان حصوله على دفعات الحياة (أو دفعات المعاش) قبل بلوغه السن الذى يحتاج فيه إلى هذه الدفعات (السن المعاشى أو سن التقاعد) ولذا فإنه يبادر إلى التعاقد مع إحدى شركات التأمين وهو فى سن صغير نسبيا لضمان حصوله على دفعات الحياة إعتبارا من بلوغه سنا أكبر أى بعد إنقضاء عدد من السنوات على تاريخ التعاقد، وبهذا الشكل تكون الدفعات مؤجلة سواء فى ذلك الدفعات العادية أو الفورية.

وهكذا فإن دفعات الحياة تنقسم إلى دفعات عادية غير مؤجلة ودفعات فورية غير مؤجلة ودفعات عادية مؤجلة ودفعات فورية مؤجلة.

ومن الضرورى أن نشير إلى أنه عندما تكون الدفعات مؤجلة فيتعين النص على ذلك صراحة أما حيث تكون الدفعات غير مؤجلة فلا يتم ذكر ذلك (إلا على سبيل الإيضاح) ويكتفى بذكر أنها عادية أو فورية.

ومن ناحية أخرى فإذا ما تم إيضاح أن الدفعات لمدى الحياة وتم تحديد سن الشخص فى تاريخ التعاقد وفى تاريخ إستحقاق الدفعة الأولى يمكن معرفة ما إذا كانت الدفعات المشار إليها مؤجلة أو غير مؤجلة.

هذا وحيث يكون مبلغ الدفعة السنوية جنيه واحد فإنه يرمز للقسط الوحيد الصافى لكل من الدفعات لمدى الحياة بالرموز الآتية:

ءس (دوليا a_x) وذلك إذا كانت الدفعات عادية (غير مؤجلة)

،ءس (دوليا $\ddot{a}_x$) وذلك إذا كانت الدفعات فورية (غير مؤجلة)

، م|ءس (دوليا $_{m|}a_x$) وذلك إذا كانت الدفعات عادية مؤجلة م من السنوات.

، م|..ءس (دوليا $_{m|}\ddot{a}_x$) وذلك إذا كانت الدفعات فورية مؤجلة م من السنوات

ونبين فيمــا يلــى كيفية حســاب القســط الوحيد الصافى لكل من الأنواع الأربعة لعقود دفعات الحياة.

أولا: الدفعات لمدى الحياة العادية (غير المؤجلة):

يضمن هذا العقد حصول المؤمن عليه على دفعات سنوية متساوية فى نهاية كل سنة طالما ظل على قيد الحياة، وطالما أن هذه الدفعات غير مؤجلة وبإفتراض أن عمر الشخص (س) فإن الدفعة الأولى تؤدى عند بلوغه تمام السن (س+١) والدفعة الثانية تؤدى عند بلوغه تمام السن (س+٢) وهكذا حتى نهاية العمر.

ومن هنا فإن عقد الدفعات لمدى الحياة العادية لشخص فى تمام السن (س) عبارة عن عدد من الوقفيات البحتة السنوية ذات المبالغ المتساوية التى يؤدى أولها عند تمام السن (س+١) ويؤدى الثانى عن تمام السن (س+٢) وهكذا طالما ظل الشخص على قيد الحياة.

وهكذا فإن القسط الوحيد الصافى لعقد الدفعات العادية لمدى الحياة لشخص فى تمام العمر س عبارة عن مجموع الأقساط الوحيدة لعقود وقفيات بحتة سنوية ذات مبالغ متساوية تؤدى إعتبارا من تمام السن س+١ وحتى نهاية العمر، فإذا ما كانت الدفعة السنوية جنيه واحد فإن:

$$\text{ءس} = \frac{\text{دس+١}}{\text{دس}} + \frac{\text{دس+٢}}{\text{دس}} + \dots \text{ إلى نهاية الجدول}$$

$$= \frac{\text{دس+١} + \text{دس+٢} \dots +}{\text{دس}}$$

ولتسهيل العمليات الحسابية هنا تم إعداد العمود الثانى من أعمدة جداول الإستعاضة أو الرموزالحسابية والذى يرمز له بالرمز(نس) حيث:

$$\text{ن س} = \frac{\text{د س} + \text{د س+١} + \text{د س+٢} + \dots \text{ إلى نهاية العمر}}{\text{د س}}$$

وعلى ذلك فإنه بفرض أن مبلغ الدفعة السنوية العادية جنيه واحد وأنها تؤدى لمدى الحياة لشخص فى تمام السن (س) فإن:

$$\text{ءس} = \frac{\text{ن س+١}}{\text{دس}}$$

ثانيا: الدفعات لمدى الحياة الفورية (غير المؤجلة):

لا تختلف هذه العقود عن عقود الدفعات لمدى الحياة العادية (غير المؤجلة) **إلا من حيث أن الدفعة الأولى تؤدى هنا فور التعاقد وفى أول كل سنة وليس بعد إنقضاء سنة من التعاقد** وفى نهاية كل من السنوات التالية:

وعلى ذلك وبمفهوم أعمدة د س، ن س من جداول الرموز الحسابية فإن:

$$\text{ءس} = \text{دس} + \text{دس+١} + \text{دس+٢} + \text{.... إلى نهاية الجدول}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دس}}{\text{دس}} + \frac{\text{دس+١}}{\text{دس}} + \frac{\text{دس+٢}}{\text{دس}} + \text{.... إلى نهاية الجدول}$$

$$= \frac{\text{دس} + \text{دس+١} + \text{دس+٢} + \text{....}}{\text{دس}} = \frac{\text{نس}}{\text{دس}}$$

ولقد أعد بجدول أعمدة الإستبدال أو الرموز الحسابية عمودا خاصا يعطينا مباشرة ءس.

هذا ولنا أن نلاحظ العلاقة بين ءس، ..ءس إذ أن الدفعات الفورية (غير المؤجلة) تزيد عن الدفعات العادية (غير المؤجلة) بمبلغ الدفعة الأولى (بمبلغ جنيه واحد) أى أن:

$$\text{ءس} = ١ + \text{ءس}$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالآتى:

$$\text{..دس} = \frac{\text{دس} + \text{دس+١} + \text{دس+٢....} +}{\text{دس}} \text{ إلى نهاية الجدول}$$

$$= \frac{\text{دس} + \text{نس}_{+1}}{\text{دس}} = \frac{\text{دس}}{\text{دس}} + \frac{\text{نس}_{+1}}{\text{دس}} = 1 + \text{عس}$$

أو أن عس = $\text{عس}-1$

ثالثا: العقود المؤجلة للدفعات مدى الحياة العادية: م|عس m|ax

تبدأ الدفعة الأولى فى هذه العقود بنهاية السنة التالية على إنقضاء فترة التأجيل، فإذا كان عمر المتعاقد (س) وفترة التأجيل (م) من السنوات فإن الدفعة الأولى تؤدى فى حالة بلوغه تمام السن (س+م+١) ويستمر أدائها فى نهاية كل سنة طالما ظل على قيد الحياة.

وهكذا فإن هذا العقد يعتبر عددا من عقود الوقفية البحتة السنوية والمتساوية فى مبالغها يؤدى أولها عند تمام السن س+م+١ ويؤدى الثانى عند تمام السن س+م+٢ وهكذا طالما ظل الشخص على قيد الحياة.

وبإفتراض أن مبلغ الدفعة جنيه واحد فإن:

$$\text{م|عس} = \frac{\text{دس+م+١}}{\text{دس}} + \frac{\text{دس+م+٢}}{\text{دس}} + \dots \text{ إلى نهاية الجدول}$$

$$= \frac{\text{دس+م+١} + \text{دس+م+٢} + \dots \text{ إلى نهاية الجدول}}{\text{دس}} = \frac{\text{نس+م+١}}{\text{دس}}$$

رابعا: العقود المؤجلة للدفعات مدى الحياة الفورية: م|..عس× m|a

تبدأ الدفعة الأولى فى هذه العقود بمجرد إنتهاء فترة التأجيل (م من السنوات) اللاحقة للسن فى تاريخ التعاقد (س) ويستمر أداءها فى أول كل سنة طالما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة.

وهكذا فإن العقد يعتبر عددا من عقود الوقفية البحتة السنوية والمتساوية فى مبالغها يؤدى أولها عند تمام السن س+م ويؤدى الثانى عند تمام السن س+م+١ ويؤدى الثالث عند تمام السن س+م+٢ وهكذا طالما الشخص على قيد الحياة.

وبإفتراض أن مبلغ الدفعة جنيه واحد فإن:

$$م|..ءس = \frac{دس+م}{دس} + \frac{دس+م+١}{دس} + \frac{دس+م+٢}{دس} + ...إلى آخر الجدول$$

$$= (دس+م + دس+م+١ + دس+م+٢ + ...إلى آخر الجدول) \div دس$$

$$= \frac{ن س+م}{دس}$$

ولنا أن نلاحظ العلاقة بين م|ءس، م|..ءس إذ أن الدفعات الفورية المؤجلة تزيد عن الدفعات العادية المؤجلة بمبلغ الدفعة الأولى ($\frac{دس+م}{د س}$ بإفتراض أن الدفعة جنيه واحد) أى أن:

$$م|..ءس = \frac{دس+م}{د س} + م|ءس$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا من خلال تتبعنا لكيفية تحديد كل من م|ءس، م|ءس

هذا وبمراجعة القسط الوحيد الصافى لكل من أنواع وثائق الدفعات لمدى الحياة العادية والفورية المؤجلة وغير المؤجلة يتبين لنا إنه إذا تم تحديد تاريخ إستحقاق الدفعة الأولى والسن فى تاريخ التعاقد فلا نحتاج بعدئذ لمعرفة ما إذا كانت الوثيقة عادية أو فورية مؤجلة أو غير مؤجلة ففى كل الأحوال فإن القسط الوحيد الصافى:

$$= مبلغ الدفعة \times \frac{ن للسن فى تاريخ إستحقاق الدفعة الأولى}{د للسن فى تاريخ التعاقد}$$

مثال٤: إحسب بإستخدام أعمدة الرموز الحسابية لجدول الحياة الأمريكي الموحد لعام ١٩٥٨، القسط الوحيد الصافى لعقد دفعات سنوية متساوية مقدار كل منها ٦٠٠ جنيها ولمدى الحياة لشخص فى تمام السن ٥٩ وذلك فى الحالتين الآتيتين-:

١- إذا كانت الدفعة الأولى تؤدى بعد سنة من التعاقد.

٢- إذا كانت الدفعة الأولى تؤدى بمجرد التعاقد.

الحل - إذا كانت الدفعة الأولى تؤدى بعد سنة من التعاقد فإننا نكون بصدد دفعات مدى الحياة عادية لشخص فى تمام السن ٥٩ وعلى ذلك يمكن تحديد القسط الصافى بإحدى الطريقتين الآتيتين:

(أ) بإستخدام عمود ن س:

$$\text{حيث أن } ء_{س} = \frac{ن_{س+١}}{د_{س}}$$

$$\therefore \text{القسط الوحيد الصافى للوثيقة} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{ن_{٥٩+١}}{د_{٥٩}}$$

$$= \text{مبلغ الدفعة} \times (ن_{٦٠} \div د_{٥٩})$$

$$= ٦٠٠ \times \frac{١٦٥١٠٠٧٨,٨}{١٣٧١٤٢٠,٢}$$

$$= ٦٠٠ \times ١٢,٠٣٨٦٧ = ٧٢٢٣,٢ \text{ جنيه}$$

(ب) بإستخدام عمود ..ءس نحصل على ذات النتيجة:

$$\text{حيث أن } ء_{س} = ..ء_{س} - ١$$

$$\therefore \text{القسط الوحيد الصافى للعقد}$$

$$= ٦٠٠(ء_{٥٩} - ١) = ٦٠٠(١٣,٠٣٨٦٧ - ١)$$

$$= ٦٠٠ \times ١٢,٠٣٨٦٧ = ٧٢٢٣,٢ \text{ جنيه}$$

٢- إذا كانت الدفعة الأولى تؤدى بمجرد التعاقد فإننا نكون بصدد دفعات مدى الحياة فورية لشخص فى تمام السن ٥٩ وعلى ذلك فإنه يمكن تحديد القسط الوحيد الصافى بإحدى الطرق الآتية:

(أ) بإستخدام عمود ن س:

$$\text{حيث أن}\ ..\text{ءس} = \frac{\text{ن س}}{\text{دس}} \qquad ٠٠٠\ \text{د}٥٩ = \frac{\text{ن}٥٩}{\text{د}٥٩}$$

$$= \frac{١٧٨٨١٤٩٩,٠}{١٣٧١٤٢٠,٢} = ٠,١٣٠٣٨٦٧$$

٠,٠ القسط الوحيد الصافى للوثيقة=٦٠٠× ء٥٩= ٦٠٠ (١+ءس)

٠,٠ القسط الوحيد الصافى للوثيقة= ٦٠٠ ×١٣,٠٣٨٦٧= ٧٨٢٣,٢جنيه

(ب) بإستخدام عمود ءس نصل إلى ذات النتيجة بصورة مباشرة:

القسط الوحيد الصافى للوثيقة = ٦٠٠ × ء٥٩ = ٦٠٠ × ١٣,٠٣٨٦٧

= ٧٨٢٣,٢ جنيه

(جـ) بإستخدام العلاقة بين ءس،..ءس نصل إلى ذات النتيجة:

القسط الوحيد الصافى للوثيقة = ٦٠٠ × ..ء٥٩ = ٦٠٠ (١+ءس)

=٦٠٠ (١+ ١٢,٠٣٨٦) = ٦٠٠ × ١٣,٠٣٨٦

=٧٨٢٣,٢ جنيه

مثال ٥: بلغ أحد العاملين سن الستين وتبين له عدم كفاية المعاش المقرر له من نظام التأمين الإجتماعى فقام بالتعاقد مع إحدى شركات التأمين على دفعة سنوية متساوية تؤدى له لمدى الحياة (معاش سنوى) فما هو القسط الصافى لهذا العقد بإعتبار أن الدفعة السنوية ٥٠٠ جم وأن الدفعة الأولى تؤدى بمجرد التعاقد وذلك بإستخدام أعمدة الإستبدال لجدول الحياة الأمريكى الموحد لعام ١٩٥٨ (معدل فائدة ٣%).

الحل: طالما أن الدفعة الأولى تؤدى بمجرد التعاقد ولمدى الحياة فإنه يمكن إيجاد قيمة القسط الوحيد الصافى للعقد بدلالة ءس فيكون:

القسط الوحيد الصافى = ٥٠٠ × ء٦٠

=٥٠٠ × ١٢,٦٣٤٧١ = ٦٣١٧,٣٦ جنيه

ويمكن أن نصل إلى ذات النتيجة بدلالة نس حيث أن:

$$\text{ء}٦٠ = \frac{\text{ن}٦٠}{\text{د}٦٠} = \frac{١٦٥١٠٠٧٨,٨}{١٣٠٦٧٢٣,٨} = ١٢,٦٣٤٧١$$

...القسط الوحيد الصافى للوثيقة=٥٠٠ × ١٢,٦٣٤٧١ =٦٣١٧,٣ جنيه

مثال ٦: ببلوغ أحد التجار سن الستين تبين له عدم قدرته على الإستمرار فى مزاولة نشاطه فباع منشأته بمبلغ ١١٦٣٤,١٠٠ جنيه وتعاقد مع إحدى شركات التأمين على أن يؤدى لها هذا المبلغ وتضمن له معاشا فى صورة دفعات سنوية متساوية فى نهاية كل سنة من تاريخ التعاقد ولمدى الحياة، فما هى الدفعة السنوية فى هذه الحالة بإستخدام أعمدة الرموز الحسابية لجدول الحياة الأمريكى الموحد لعام ١٩٥٨.

الحل: حيث أن الدفعة السنوية فى هذا المثال دفعة عادية (الدفعة الأولى تؤدى إعتبارا من سن الـ٦١).

وحيث أن ءس = ءس-١ ∴ ء٦٠ = ء٦٠ - ١

= ١٢,٦٣٤٧١ – ١ = ١١,٦٣٤١

وحيث أن القسط الوحيد للعقد = مبلغ الدفعة × ء٦٠

أى أن ١١٦٣٤,١ = مبلغ الدفعة × ١١,٦٣٤١

∴ مبلغ الدفعة = $\frac{١١٦٣٤,١}{١١,٦٣٤١}$ = ١٠٠٠ جنيه

ويمكن أن نصل إلى ذات النتيجة بإستخدام عمود نس بإعتبار أن:

$$ءس = \frac{ن\ س+١}{د\ س}$$

مثال ٧: تعاقد شخص عمره ٤٠ عاما مع إحدى شركات التأمين على أن تؤدى له معاشا سنويا قدره ١٢٠٠ جنيها إعتبارا من بلوغه تمام الستين وطالما ظل على قيد الحياة، فما هو القسط الوحيد الصافى إذا علمت أن:

ن٦٠ = ١٦٥١٠٠٧٨,٨

د٤٠ = ٢٨٣٣٠٠١,٨

الحل: العقد عبارة عن دفعة سنوية قدرها ١٢٠٠ جنيه لشخص فى تمام العمر ٤٠ ولمدى الحياة، ويبدأ إستحقاق الدفعة الأولى فى تمام السن ٦٠، وسواء إعتبرنا هذا العقد دفعات سنوية لمدى الحياة فورية مؤجلة ٢٠ عاما أو عادية مؤجلة ١٩ عاما فإن النتيجة لاتختلف ويكون:

القسط الوحيد الصافى للعقد = ١٢٠٠ (ن٦٠ ÷ د٤٠)

= ١٢٠٠ (١٦٥١٠٠٧٨,٨ ÷ ٢٨٣٣٠٠١,٨)

= ١٢٠٠ × ٥,٨٢٧٧٦٧ = ٦٩٩٣,٣ جنيه

-عقود الدفعات السنوية المؤقتة: Temporary Life Annuities

يقصد بذلك الدفعات السنوية المتساوية التى تؤدى لعدد محدود من السنوات (وليس لمدى الحياة) **طالما كان المؤمن عليه على قيد الحياة.**

وكما رأينا بالنسبة للدفعات السنوية لمدى الحياة فإن الدفعات السنوية المؤقتة قد تؤدى فى نهاية كل سنة فتؤدى للدفعة الأولى بعد سنة من التعاقد ولمدة (ن) من السنوات ونكون بصدد دفعات سنوية مؤقتة عادية (غير مؤجلة**) وقد تؤدى الدفعات فى أول كل سنة فتؤدى الدفعة الأولى فور التعاقد ولمدة (ن) من السنوات ونكون بصدد دفعات سنوية مؤقتة فورية (**غير مؤجلة**).**

ومن ناحية أخرى فقد تكون الدفعات السنوية المؤقتة مؤجلة لعدد محدود من السنوات (وليكن م من السنوات**) وفى هذه الحالة فقد تكون مؤجلة عادية وقد تكون مؤجلة فورية.**

وهكذا فإن الدفعات المؤقتة تنقسم إلى دفعات عادية (غير مؤجلة**) ودفعات فورية (**غير مؤجلة**) ودفعات عادية (**مؤجلة**) ودفعات فورية (**مؤجلة**).**

ومن الضرورى أن نشير إلى أنه عندما تكون الدفعات مؤجلة فيتعين النص على ذلك صراحة، وإذا ما تم إيضاح أن الدفعات مؤقتة لمدة ن من السنوات وتـم تحديد سن الشـخص فى تاريخ التعاقد وفى تاريخ إستحقاق الدفعة الأولى يمكن معرفة ما إذا كانت الدفعات المشار إليها مؤجلة أو غير مؤجلة.

هذا وحيث يكون مبلغ الدفعة السنوية جنيه واحد فإنه يرمز القسط الوحيد الصافى لكل من أنواع الدفعات المؤقتة (لمدة ن من السنوات لشخص فى تمام السن س**) بالرموز الآتية:**

١-ءس: ن| أو |ن ءس (ax:n| أو nax|)
وذلك إذا كانت الدفعات المؤقتة عادية (غير مؤجلة).

٢- ءس: ن| أو |ن..ءس (|a..x:n أو na..x|)
وذلك إذا كانت الدفعات المؤقتة فورية (غير مؤجلة).

٣- م|ءس: ن| أو م|نءس (|m|ax:n أو m|nax)
وذلك إذا كانت الدفعات المؤقتة عادية مؤجلة.

٤- م|..ءس: ن| أو م|ن..ءس (|m| a..x:n أو m|na..x)
وذلك إذا كانت الدفعات المؤقتة فورية مؤجلة.

ونبين فيما يلى كيفية حساب القسط الوحيد الصافى لكل من الأنواع الأربعة لعقود الدفعات المؤقتة وذلك مع إستخدام الرمز الأول:

أولا: عقد الدفعات المؤقتة العادية:

يلاحظ هنا أن العقد عبارة عن مجموعة من عقود الوقفية البحتة ذات مبالغ متساوية يؤدى أولها عند تمام السن س+١ ويؤدى الثانى عندتمام السن س+ن وذلك كله طالما كان الشخص مازال على قيد الحياة.

أى أن ءس :ن| $= \frac{\text{دس+١}}{\text{دس}} + \frac{\text{دس+٢}}{\text{دس}} + ... + \frac{\text{دس+ن}}{\text{دس}}$

$= \frac{\text{دس+١ + دس+٢ + ... + دس+ن}}{\text{دس}}$

وحيث أن ن س= $\frac{\text{دس + دس+١ + دس+٢ + ...}}{\text{دس}}$ إلى آخر الجدول

أى أن ن س+١= $\frac{\text{دس+١ + دس+٢ + ...}}{\text{دس}}$ إلى آخر الجدول

$$\text{، ن س+ن+١} = \frac{\text{دس+ن+١ + دس+ن+٢ + ...}}{\text{دس}}$$

$$\text{٠,٠ دس: ن|} = \frac{\text{ن س+١ – ن س+ن+١}}{\text{د س}}$$

ثانيا: عقد الدفعات المؤقتة الفورية $\dot{\text{ءس}}$: ن|

يلاحظ هنا أن العقد عبارة عن مجموعة من عقود الوقفية البحتة ذات مبالغ وقفية متساوية يؤدى أولها بمجرد التعاقد ويؤدى الثانى طالما كان المؤمن عليه على قيد الحياة بعد سنة من التعاقد (فى تمام السن س+١) ويؤدى الثالث إذا ظل المؤمن عليه على قيد الحياة بعد سنة ثانية من التعاقد (فى تمام السن س+٢) وهكذا حتى يؤدى الأخير فى حالة بلوغ المؤمن عليه تمام السن س+ن-١.

وعلى ذلك فإن:

$$\text{..ءس: ن|} = \frac{\text{دس}}{\text{دس}} + \frac{\text{دس+١}}{\text{دس}} + \frac{\text{دس+٢}}{\text{دس}} + \ldots + \frac{\text{دس+ن-١}}{\text{دس}}$$

$$= \frac{\text{دس + دس+١ + دس+٢ + ... + دس+ن-١}}{\text{دس}}$$

وحيث أن ن س= دس + دس+١ + دس+٢ + ... إلى آخره

أى أن ن س+ن= دس+ن + دس+ن+١ + ... إلى آخره

$$\text{فإن ..دس: ن|} = \frac{\text{ن س – ن س+ن}}{\text{د س}}$$

هذا ولنا أن نلاحظ فى مجال حساب القسط الوحيد الصافى لعقود الدفعات المؤقتة (غير المؤجلة**) ما يلى:**

١

- إذا كان مبلغ الدفعة جنيه واحد لمدة ن من السنوات فإن القسط الوحيد لعقد الدفعات الفورية لمدة ن من السنوات يزيد بواقع جنيه واحد عن القسط الوحيد لعقد دفعات عادية لمدة ن-١ من السنوات.

أى أن :

..ءس : ن|= ١ + ءس : ن-١|

ويمكن إثبات ذلك رياضيا كما يلى:

حيث أن ..ءس: ن| = $\frac{\text{ن س – ن س+ن}}{\text{دس}} = \frac{\text{دس}}{\text{دس}} + \frac{\text{ن س+١ – ن س+ن}}{\text{دس}}$

، ،، ءس: ن| = $\frac{\text{ن س+١ – ن س+ن+١}}{\text{دس}}$

، ، ءس: ن-١| = $\frac{\text{ن س+١ – ن س+ن}}{\text{دس}}$

، ، ءس: ن| = ١+ءس : ن-١|

٢- تتحدد العلاقة بين الدفعات المؤقتة والدفعات مدى الحياة بالنظر إلى أن الدفعات المؤقتة لمدة ن من السنوات عبارة عن دفعة لمدى الحياة مطروحا منها دفعة لمدى الحياة مؤجلة لمدة ن من السنوات، أى أن:

ءس: ن| = ءس - ن|ءس

كما أن :

.. ءس: ن| = ..ءس - ن|..ءس

ويمكن إثبات ذلك رياضيا بالنسبة للدفعات العادية كمايلى:

ءس: ن| = $\frac{\text{ن س+١ – ن س+ن+١}}{\text{دس}} = \frac{\text{ن س+١}}{\text{دس}} - \frac{\text{ن س+ن+١}}{\text{دس}}$

= ءس - ن|ءس

ويمكن إثبات ذلك رياضيا بالنسبة للدفعات الفورية كمايلى:

..ءس: ن| = (ن س – ن س+ن) / دس = ن س / دس - ن س+ن / دس

= ءس - ن|..ءس

ثالثا: الدفعات المؤقتة المؤجلة العادية: م|ءس: ن|

وفقا لهذا النوع من الدفعات فإن الدفعة السنوية تؤدى لعدد محدود من السنوات (ولذا فإنها مؤقتة) يلــى إنقضــاء فتــرة تأجيل (ولذا فالدفعة مؤجلة) مع مراعاة أن أداء الدفعات يتم فى نهاية كل سنة (ولذا فإنها عادية) وذلك بالطبع طالما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة.

وهكذا فإذا كان سن المؤمن عليه عند التعاقد هو س فإن الدفعة الأولى تؤدى فى نهاية السنة التالية لإنقضاء فترة التأجيل (م) أى تؤدى فى تمام السن (س+م+١) ثم تؤدى الدفعة الثانية فى تمام السن (س+م+٢) وهكذا حتى تؤدى الدفعة الأخيرة فى تمام السن (س+م+ن) وذلك بإفتراض حياة الشخص حتى تمام هذا السن.

وعلى ذلك فإن:

م|ءس: ن| = دس+م+١ / دس + دس+م+٢ / دس + ... + دس+م+ن / دس

= (دس+م+١ +دس+م+٢ +... + دس+م+ن) / دس

= (ن س+م+١ - ن س+م+ن+١) / دس

كما أن :

م|ءس: ن| = م|ءس - م+ن|ءس

أى أن الدفعات العادية المؤقتة لمدة (ن) من السنوات والمؤجلة لمدة (م) من السنوات عبارة عن دفعة عادية لمدى الحياة مؤجلة (م) من السنوات مطروحا منها دفعة عادية لمدى الحياة مؤجلة لمدة (م+ن) من السنوات.

كما يمكن إثبات أن:

م|ءس: ن| = ءس : م+ن| - ءس : م|

وذلك حيث أن:

ن س+م+١ - ن س+م+ن+١

م|ءس: ن| = ────────────

دس

(ن س - ن س+م+ن+١)- (ن س -ن س+م+١)

= ────────────

دس

= ءس: م+ن| - ءس: م|

أى أن الدفعات العادية المؤقتة لمدة (ن) من السنوات والمؤجلة (م) من السنوات عبارة عن دفعة عادية مؤقتة لمدة (م+ن) من السنوات مطروحا منها دفعة عادية مؤقتة لمدة (م) من السنوات.

رابعا: الدفعات المؤقتة المؤجلة الفورية:

وفقا لهذا النوع من الدفعات فإن الدفعة الأولى تؤدى بمجرد إنقضاء (م) من السنوات على تاريخ التعاقد وتستمر سنويا لمدة (ن) من السنوات طالما ظل الشخص على قيد الحياة.

وهكذا ووفقا للخطوات المتبعة فى بيان الدفعات العادية المماثلة فإنه بالنسبة لكل واحد جنيه من هذه الدفعات فإن:

دس+م+دس+م+١+... +دس+م+ن-١ ؛ ن س+م – ن س+م+ن

م|..ءس:ن|= ────────── = ──────────

دس ؛ دس

أو = م|..ءس - م+ن|..ءس

أو = ..ءس : م+ن| - ..ءس:م| = ءس: م+ن-١|- ءس : م-١|

هذا وبمراجعة القسط الوحيد الصافى لكل من أنواع وثائق الدفعات المؤقتة العادية والفورية المؤجلة وغير المؤجلة يتبين لنا إنه إذا تم تحديد تاريخ إستحقاق الدفعة الأولى وعدد الدفعات (أو عدد السنوات التى تصرف خلالها الدفعة المؤقتة السنوية**) والسن فى تاريخ التعاقد فلا نحتاج بعدئذ لمعرفة ما إذا كانت الوثيقة عادية أو فورية مؤجلة أو غير مؤجلة ففى كل الأحوال فإن القسط الوحيد الصافى:**

=مبلغ الدفعة

$$\times \frac{\text{ن للسن فى تاريخ لدفعة الأولى} - \text{ن للسن فى تاريخ لدفعة الأولى} + \text{عدد السنوات}}{\text{د للسن فى تاريخ التعاقد}}$$

ويقصد بعدد السنوات هنا عدد السنوات التى تؤدى خلالها الدفعة السنوية المؤقتة طالما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة أى عدد الدفعات.

مثال ٨: بإستخدام أعمدة الإستبدال لجدول الحياة الأمريكى لعام ١٩٥٨ أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد دفعة سنوية عادية قدرها ١٠٠٠ جنيه لشخص فى تمام السن ٥٠ لمدة ١٠ سنوات.

وما هو القسط الوحيد الصافى فى الحالة السابقة لو كانت الدفعة فورية.

الحل: ١- لو كانت الدفعة عادية فإن:

$$\text{ء}_{٥٠}\text{: ١٠|} = \frac{\text{ن}_{٥١} - \text{ن}_{٦١}}{\text{د}_{٥٠}} = \frac{٣١٢٩٦٢٠٦,٩ - ١٥٢٠٣٣٥٥}{١٩٩٨٧٤٤}$$

$$= \frac{١٦٠٩٢٨٥١,٩}{١٩٩٩٨٧٤٤} = ٨,٠٥١٤٨٢$$

٠,٠القسط الوحيد الصافى للدفعة= ١٠٠٠×٨,٠٥١٤٨٢ =٨٠٥١,٤ جنيه

٢- لو كانت الدفعة فورية فإن:

ن٥٠ - ن٦٠ ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩ - ١٦٥١٠٠٧٨,٨

..ع٥٠: ١٠| = ــــــــ = ـــــــــــــــــــ

د٥٠ ١٩٩٨٧٤٤

= ١٦٧٨٤٨٧٢,١ / ١٩٩٨٧٤٤ = ٨,٣٩٧٧١٠

.·. القسط الوحيد الصافى للعقد=١٠٠٠×٨,٣٩٧٧١٠ = ٨٣٩٧,٧ جنيه

مثال ٩: بإستخدام أعمدة الرموز الحسابية لجدول الحياة الأمريكى لعام ١٩٥٨ أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد دفعة سنوية عادية قدرها ٥٠٠ جنيه ولمدة ٩ سنوات لشخص فى تمام السن ٦٠.

وبإستخدام النتيجة السابقة أوجد القسط الوحيد الصافى الذى يؤديه نفس الشخص لو كانت الدفعة فورية لمدة ١٠ سنوات.

الحل: ١- لو كانت الدفعة السنوية عادية لمدة ٩ سنوات:

ن٦١ - ن٧٠ ١٥٢٠٣٣٥٥ - ٦٢١٦٥٥٣,١

ع٦٠: ٩| = ــــــــ = ـــــــــــــــــــ

د٦٠ ١٣٠٦٧٢٣,٨

= ٨٩٨٦٨٠١,٩ / ١٣٠٦٧٢٣,٨ = ٦,٨٧٧٣٥٤

.·. القسط الوحيد الصافى للعقد =٥٠٠×٦,٨٧٧٣٥٤ = ٣٤٣٨,٧ جنيه

٢- لو كانت الدفعة فورية لمدة ١٠ سنوات وبإستخدام النتيجة السابقة (أى بدون جدول الرموز الحسابية)، فإن:

ءس: ن| - ١ + ءس : ن-١|

أى أن ..ء٦٠: ١٠| = ١ + ء٦٠ : ٩|

.·.القسط الوحيد الصافى للوثيقة = ٥٠٠ (١+ء٦٠ : ٩|)

= ٥٠٠ + ٥٠٠ء٦٠: ٩|

.·.القسط الوحيد الصافى للعقد = ٥٠٠×٣٤٣٨,٦٧٧ = ٣٩٣٨,٧ جنيه

مثال ١٠: فى تمام السن ٣٠ تعاقد أحد الأشخاص مع شركة تأمين على أن تؤدى له دفعة سنوية قدرها ١٠٠٠ جنيه إعتبارا من تاريخ بلوغه الخمسين ولمدة ١٠ سنوات.

فما هو القسط الوحيد الصافى لهذا العقد بإستخدام أعمدة الرموز الحسابية لجدول الحياة الأمريكى لعام ١٩٥٨.

الحل: الدفعات السنوية هنا مؤقتة بعشر سنوات (أى أن ن=١٠) وتؤدى الدفعة الأولى عند تمام السن ٥٠ فـإذا إعتبرناها دفعات عادية فإنهـا تكون مؤجلة لمـدة ١٩ عاما وإذا إعتبرناها دفعات فورية فإنها تكون مؤجلة لمدة ٢٠ عاما والنتيجة واحدة فى الحالتين حيث أن:

١٩|ء٣٠: ١٠| = ٢٠|..ء٣٠: ١٠|

ن٥٠- ن٦٠ ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩ - ١٦٥١٠٠٧٨,٨

= ــــــــ = ــــــــــــــــــــ

د٣٠ ٣٩٠٥٧٨٢

= ١٦٧٨٤٨٧٢,١ = ٤,٢٩٧٤٤٢

٣٩٠٥٧٨٢

∴ القسط الوحيد الصافى للعقد=١٠٠٠× ٤,٢٩٧٤٤٢ =٤٢٩٧,٤ جنيه

تمرين عام

تعاقد شخص فى تمام السن ٣٥ مع إحدى شركات التأمين على أن تؤدى له المبالغ الآتية طالما ظل على قيد الحياة:

١- ٥٠٠٠ جنيه عند بلوغه سن الخامسة والخمسين.

٢- معاشا سنويا قدره ٥٠٠ جنيها إعتبارا من بلوغه تمام السن ٦٠ يخفض إلى ٣٠٠ جنيها عند بلوغه تمام السن ٧٠.

والمطلوب حساب القسط الوحيد الصافى لهذا العقد بإستخدام جدول أعمدة الإستبدال للجدول الأمريكى لعام ١٩٥٨.

الحل: يمكن تحليل العقد فى هذا المثال إلى أنه يتكون مما يلى:

١- عقد وقفية بحته مبلغها ٥٠٠٠ جنيه تؤدى عند تمام السن ٥٥.

٢- عقد دفعة سنوية لمدىالحياة قيمتها٣٠٠جنيها إعتبارا من تمام السن٦٠

٣- عقد دفعة سنوية مؤقتة قيمتها ٢٠٠ جنيه تؤدى إعتبارا من تمام السن ٦٠ ولمدة ١٠ سنوات.

وحيث أن السن فى تاريخ التعاقد ٣٥ عاما..

٠,٠القسط الوحيد الصافى

$$= ٥٠٠٠ \left(\frac{\text{د٥٥}}{\text{د٣٥}}\right) + ٣٠٠ \left(\frac{\text{ن٦٠}}{\text{د٣٥}}\right) + ٢٠٠ \left(\frac{\text{ن٦٠-ن٧٠}}{\text{د٣٥}}\right)$$

=(٥٠٠٠ د٥٥ + ٣٠٠ ن٦٠ +٢٠٠ ن٦٠ - ٢٠٠ ن٧٠) ÷ د٣٥

=(٥٠٠٠ د٥٥ + ٥٠٠ ن٦٠ - ٢٠٠ ن٧٠) ÷ د٣٥

$$= \frac{(\text{١٦٣٩٣٢٩,٧×٥٠٠٠})+(\text{١٦٥١٠٠٧٨,٨×٥٠٠})-(\text{٦٢١٦٥٥٣,١×٢٠٠})}{\text{٣٣٣١٢٩٥,٤}}$$

$$= \frac{\text{٨١٩٦٦٤٨٥٠٠} + \text{٨٢٥٥٠٣٩٤٠٠} - \text{١٢٤٣٣١٠٦٢٠}}{\text{٣٣٣١٢٩٥,٤}}$$

$$= \frac{\text{١٦٤٥١٦٨٧٩٠٠} - \text{١٢٤٣٣١٠٦٢٠}}{\text{٣٣٣١٢٩٥,٤}}$$

$$= \frac{\text{١٥٢٠٨٣٧٧٢٨٠}}{\text{٣٣٣١٢٩٥,٤}} = \text{٤٥٦٥,٣}$$ جنيه

المبحث الثانى
العقود التى تدفع مبالغها فى حالة الوفاه

-التأمين لمدى

الحياة

-التأمين المؤقت

وفقا لهذا النوع من العقود التى تسمى بعقود التأمين على الحياة Life insurance policies يلتزم المؤمن بأداء مبلغ التأمين إلى المستفيدين Beneficiaries فى حالة وفاة المؤمن عليه فى أى وقت إعتبارا من تاريخ التعاقد (تأمين لمدى الحياة**) أو فى أى وقت إعتبارا من تاريخ تال لتاريخ التعاقد (**تأمين لمدى الحياة مؤجل**) أو فى أى وقت خلال مدة محدودة تبدأ بمجرد التعاقد (**تأمين مؤقت**) أو تلى تاريخ التعاقد بفترة (**تأمين مؤقت مؤجل**).**

ونتناول فى هذا المبحث كيفية حساب القسط الوحيد الصافى لكل من عقود التأمين لمدى الحياة بنوعيها (المؤجلة وغير المؤجلة**) وعقود التأمين المؤقت بنوعيها (**المؤجلة وغير المؤجلة**) وذلك بإستخدام أعمدة الرموز الحسابية لجدول الخبرة الأمريكى لعام ١٩٥٨، وحيث يفترض أن مبلغ التأمين جنيه واحد يؤدى فى نهاية السنة التى تقع فيها الوفاة.**

-عقود التأمين لمدى الحياة Whole Life Assurance

وهذه تنقسم إلىعقد التأمين لمدى الحياة(غيرالمؤجل**) وعقد التأمين لمدى الحياة المؤجل، مع ملاحظة أنه حيث يكون العقد مؤجلا فيجب أن ينص علىذلك صراحة أما إذا لم ينص على ذلك فيعتبر العقد غير مؤجل.**

وبإفتراض أن سن المتعاقد (س) وأن مبلغ التأمين الذى يؤدى للمستفيدين فى نهاية السنة التى تقع فيها الوفاة جنيه واحد، فإن القسط الوحيد الصافى يرمز له بالآتى:

أس A_x وذلك حيث يؤدى مبلغ التأمين فى حالة الوفاة فى أى سن إعتبارا من تاريخ التعاقد.

م|اس $_{m|}A_x$ وذلك حيث يؤدى مبلغ التأمين فى حالة الوفاة فى أى سن لاحق لفترة تأجيل قدرها(م) من السنوات.

ونبين فيما يلى كيفية حساب القسط الوحيد الصافى لكل من هذين النوعين:

أولا: عقد التأمين لمدى الحياة (غير مؤجل)**:** أس**Ax**

وفقا لهذا العقد يلتزم المؤمن بأن يؤدى مبلغ التأمين فى حالة الوفاة فى أى سن إعتبارا من تاريخ التعاقد، فإذا ما إفترضنا أن مبلغ التأمين جنيه واحد وأن سن المؤمن عليه س فإن القسط الوحيد الصافى والذى يرمز له بالرمز أس يتحدد بالقيمة الحالية للتوقع الرياضى أى لإحتمال الوفاة السنوى إعتبارا من تاريخ التعاقد، أى أن:

أس = القيمة الحالية لجنيه واحد يؤدى فى نهاية السنة الأولى فى حالة وفاة المؤمن عليه قبل تمام السن (س+١).

+ القيمة الحالية لجنيه واحد يؤدى فى نهاية السنة الثانية فى حالة الوفاة بين تمام السن (س+١) وقبل تمام السن (س+٢).

+ القيمة الحالية لجنيه واحد يؤدى فىنهاية السنة الثالثة فى حالة الوفاة بين تمام السن(س+٢)وهكذا حتى نهاية الجدول .

أى أن:

$$\text{أس} = \frac{\text{وس}}{\text{ح س}} \times \text{ح} + \frac{\text{وس+١}}{\text{ح س}} \times \text{ح}^{٢} + \frac{\text{وس+٢}}{\text{ح س}} \times \text{ح}^{٣} + \dots \text{حتى نهاية الجدول}$$

$$= \frac{\text{وس ح} + \text{وس+١ ح}^{٢} + \text{وس+٢ ح}^{٣} + \dots \text{حتى نهاية الجدول}}{\text{ح س}}$$

وبضرب كل من البسط والمقام بالطرف الأيسر فى ح س

$$\text{٠,٠أس} = \frac{\text{وس ح س+١} + \text{وس+١ ح س+٢} + \text{وس+٢ ح س+٣} .. + \text{حتى نهاية الجدول}}{\text{ح س ح س}}$$

وقد تم ضرب الطرف الأيسر فى ح س نظرا لأن الخبراء الرياضيون إتخذوا حاصل ضرب وس ح س+١ أساسا لإعداد أربعة من

أعمدة الإستبدال أو الرموز الحسابية لتسهيل حساب أقساط تأمينات الحياة، وذلك على النحو التالى:

١- عمود ج س :Cx ليعطى حاصل وس ح س+١

ج س+ج س+١+ج س+٢+ ..

٢-عمود مـ س :Mx ليعطى حاصل ———————— إلى نهاية الجدول

د س

٣-عمود أس :Ax ليعطى حاصل مـ س ÷ د س مباشرة

٤- عمود مجـ مـ س :Rx ليعطى حاصل مـ س+مـ س+١+مـ س+٢ +...

إلى نهاية الجدول

ومن هنا فإن:

ج س + ج س+١ + ج س+٢.... +

أس = ———————————— إلى آخر الجدول

د س

= مـ س ÷ دس ويمكن الحصول عليها من الجدول مباشرة

ثانيا : عقد التأمين مدى الحياة المؤجل: م|أسm|Ax

وفقا لهذا العقد يلتزم المؤمن بأن يؤدى مبلغ التأمين فى حالة الوفاة فى أى سن يلى فترة تأجيل قدرها م من السنوات الكاملة التالية لتاريخ التعاقد، فإذا ما إفترضنا أن مبلغ التأمين جنيه واحد يؤدى للمستفيدين فى نهاية السنة التى تقع فيها الوفاة وأن سن المؤمن عليه س فإن القسط الوحيد الصافى لهذا العقد والذى يرمز له بالرمز م|أس m|Axيتحدد بالقيمة الحالية للتوقع الرياضى أى لإحتمال الوفاة السنوى إعتبارا من مضى م السنوات على تاريخ التعاقد، أى أن:

م|أس= القيمة الحالية لجنيه يؤدى فى نهاية (م+١) سنة فى حالة الوفاة بين تمام السن(س+م)وقبل تمام السن(س+م+١).

+ القيمة الحالية لجنيه يؤدى فى نهاية (م+٢) سنة فى حالة الوفاة بين تمام السن (س+م+١) وقبل تمام السن (س+م+٢).

+

+ ...حتى نهاية الجدول

أى أن:

وس+م   وس+م+١

م|أس= ـــــ ×ح م+١+ـــــ× ح م+٢

ح س   ح س   إلى نهاية الجدول

وس+م ح م+١ + وس+م+١ ح م+٢ +

= ـــــــــــــــــــــــــــــــ

ح س   إلى نهاية الجدول

وبضرب الطرف الأيسر فى (ح س ÷ ح س) فإن

وس+م ح س+م+١ + وس+م+١ ح س+م+٢ ... +

م|أس = ـــــــــــــــــــــــــــــــ

ح س ح س   إلى نهاية الجدول

ج س+م + ج س+م+١+..   مـ س+م

= ـــــــــــــــ = ـــــــــــــــ

دس   دس

هذا وبمراجعة القسط الوحيد الصافى لعقد التأمين مدى الحياة المؤجل يتبين لنا إذا ما تم تحديد تاريخ بدء سريان العقد والسن فى تاريخ التعاقد فلا نحتاج عندئذ لمعرفة ما إذا كانت الوثيقة مؤجلة أو غير مؤجلة ففى الحالتين يتحدد قسطها الوحيد الصافى كما يلى:

القسط الوحيد الصافى للوثيقة=   م للسن عند بدء سريان الوثيقة

مبلغ التأمين× ـــــــــــــــــــــــــ

د للسن فى تاريخ التعاقد

مثال ١: ما هو القيط الوحيد الصافى لعقد تأمين مدى الحياة مبلغه ٥٠٠٠ جنيه (أى أن المؤمن يلتزم بأداء ٥٠٠٠ جنيه فى حالة الوفاة فى أى سن) لشخص فى تمام السن ٣٠ وذلك بإستخدام أعمدة الرموز الحسابية الآتية لجدول الحياة الأمريكى لعام ١٩٥٨:

١- عمودى مـ س، د س

٢- عمود أس

الحل: ١- بإستخدام عمودى مـ س، د س:

أس = مـ س ÷ دس

٠,٠ أ٣٠ = مـ٣٠ ÷ د٣٠= ١٢٣٤٩٥٢,٩٩ = ٠,٣١٦١٨٥٨

٣٩٠٥٧٨٢

∴ القسط الوحيد الصافى = ٥٠٠٠× ٠,٣١٦١٨٥٨ = ١٥٨٠,٩ جنيه
٢- بإستخدام عمود أس أ٣٠ = ٠,٣١٦١٨٥٨
∴ القسط الوحيد الصافى = ١٥٨٠,٩٢٩ جنيه

مثال ٢: ما هو القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مدى الحياة مؤجل ٢٠ عاما مبلغه ٥٠٠٠ جنيه (أى أن المؤمن يلزم بأداء مبلغ التأمين فى حالة الوفاة فى أى وقت بعد ٢٠ سنة من التعاقد)، لشخص فى تمام السن ٣٠.

الحل

$$∴ م|أس = \frac{مـ_{س+م}}{د_س} \qquad ∴ ٢٠|أ٣٠ = \frac{مـ_{٣٠+٢٠}}{د_{٣٠}} = \frac{مـ_{٥٠}}{د_{٣٠}}$$

$$= \frac{١٠٢٨٩٨٨,١٨٤}{٣٩٠٥٧٨٢} = ٠,٢٦٣٤٥٢٥$$

∴ القسط الوحيد الصافى = ٥٠٠٠×٢٠|أ٣٠ = ٥٠٠٠×٠,٢٦٣٤٥٢٥
= ١٣١٧,٢٦

جنيه

-عقود التأمين المؤقت:

وهذه تنقسم إلى عقد التأمين المؤقت (غير المؤجل) وعقد التأمين المؤقت المؤجل، مع ملاحظة أنه حيث يكون العقد مؤجلا فيجب أن ينص علىذلك صراحة أما إذا لم ينص علىذلك فيعتبر العقد المؤقت غيرمؤجل.

وبإفتراض أن سن المتعاقد (س) وأن مبلغ التأمين الذى يؤدى للمستفيدين فى نهاية السنة التى تقع فيها الوفاة جنيه واحد وأن مدة سريان العقد (ن) من السنوات الكاملة، فإن القسط الوحيد الصافى يرمز له بالآتى :

أس١: ن |Ax١:n| أو |ن أس nAx|
وذلك للعقد المؤقت (غير المؤجل)

م|أس١: ن m|Ax١:n| أو م|ن أس m|nAx
وذلك للعقد المؤقت المؤجل

ونبين فيما يلى كيفية حساب القسط الوحيد الصافى لكل من هذين النوعين بإستخدام الرمز الأول وجدول أعداد الإستعاضة أو الرموز الحسابية لجدول الخبرة الأمريكى لعام ١٩٥٨:

أولا: عقد التأمين المؤقت (غير مؤجل): **أس١: ن|**

وفقا لهذا العقد يفترض إلتزام المؤمن بأداء مبلغ التأمين فى نهاية السنة التى تتم فيها الوفاة وذلك إذا وقعت خلال عدد محدود من السنوات إعتبارا من تاريخ التعاقد مباشرة.

ووفقا لهذا المفهوم فإنه إذا ما إفترضنا أن عمر المؤمن عليه (س) وأن مبلغ التأمين جنيه واحد يؤدى للمستفيدين فى نهاية السنة التى تقع فيها الوفاة وذلك إذا وقعت بين تمام السن (س) وخلال (ن) من السنوات أى قبل تمام السن (س+ن)، فإن القسط الوحيد الصافى لمثل هذا العقد والذى يرمز له بالرمز أس : ن| يتحدد بالقيمة الحالية للتوقع الرياضى أى القيمة الحالية لإحتمال الوفاة السنوى بين تمام السن (س) وتمام السن (س+ن) أى أن:

أس : ن| = القيمة الحالية لجنيه يدفع فى نهاية السنة الأولى فى حالة الوفاة بين تمام السن (س) وقبل تمام السن (س+١).
+ القيمة الحالية لجنيه يدفع فى نهاية السنة الثانية فى حالة الوفاة بين تمام السن (س+١) وتمام السن (س+٢).
+ ....
+ القيمة الحالية لجنيه يدفع بعد (ن) من السنوات فى حالة الوفاة بين تمام السن(س+ن-١) وتمام السن (س+ن).

= (وس ح + وس+١ ح٢ + ... + وس+ن-١ ح ن) / ح س

وبضرب الطرف الأيسر فى ح س ÷ ح س

$$= \frac{\text{وس ح س} + \text{و}_{\text{س+١}} \text{ ح س+١} + \text{و}_{\text{س+٢}} \text{ ح س+٢} + \dots + \text{و}_{\text{س+ن-١}} \text{ ح س+ن-١}}{\text{ح س}}$$

=(ج س+ج س+١+... +ج س+ن-١) ÷ د س

$$= \frac{(\text{ج س+ج س+١+..إلى نهاية الجدول}) - (\text{ج س+ن+ج س+ن+١+...إلى نهاية الجدول})}{\text{دس}}$$

$$= \frac{\text{مـ س}}{\text{د س}} - \frac{\text{مـ س+ن}}{\text{د س}} = \frac{\text{مـ س- مـ س+ن}}{\text{د س}}$$

ثانيا : عقد التأمين المؤقت المؤجل: أس١: ن|

وفقا لهذا العقد يلتزم المؤمن بأداء مبلغ التأمين إذا وقعت الوفاة خلال عدد محدد من السنوات تبدأ بعد فترة تأجيل تلى تاريخ التعاقد.

فإذا ما إفترضنا أن عمر المؤمن عليه هو (س) وأن مبلغ التأمين جنيه واحد يؤدى فى نهاية السنة التى تقع فيها الوفاة بشرط أن تقع الوفاة خلال (ن) من السنوات تبدأ بعد فترة تأجيل قدرها (م) من السنوات أى بشرط أن تقع الوفاة بين تمام السن (س+م) وقبل بلوغ الشخص تمام السن (س+م+ن) فإن القسط الوحيد الصافى لمثل هذا العقد والذى يرمز له بالرمز م|أس١: ن يتحدد بالقيمة الحالية للتوقع الرياضى أى القيمة الحالية لإحتمال الوفاة السنوى بين تمام السن (س+م) وتمام السن (س+م+ن) أى أن:

م|أس١ : ن| = القيمة الحالية لجنيه يدفع بعد م+١ سنة إذا وقعت
الوفاة بين تمام السن س+م وتمام السن س+م+١
+ القيمة الحالية لجنيه يدفع بعد م+٢ سنة إذا وقعت
الوفاة بين تمام السن س+م+١ وقبل بلوغ السن س+م+٢
+ ....

+ القيمة الحالية لجنيه يدفع بعد م+ن سنة إذا وقعت الوفاة بين تمام السن س+م+ن-١ وقبل بلوغ السن س+م+ن

وس+م ح م+١ + وس+م+١ ح م+٢ + ... وس+م+ن-١ ح م+ن
= ـــ
ح س

وبضرب كل من البسط والمقام فى ح س

=وس+م ح س+م+١+وس+م+١ ح س+م+٢+...+وس+م+ن-١ ح س+م+ن
ـــ
ح س ح س

=ج س+م + ج س+م+١+...+ج س+م+ن-١
ـــــــــــــــــــــــــــــــــ
د س

=ج س+م + ج س+م+١+... إلى نهاية الجدول
(-ج س+م+ن + ج س+م+ن+١ + ... إلى نهاية الجدول) ÷ د س

مـ س+م   مـ س+م+ن   مـ س+م - مـ س+م+ن
=ـــــــ - ـــــــ = ـــــــــــــــ
د س   د س   د س

هذا وبمراجعة القسط الوحيد الصافى لعقد التأمين المؤقت المؤجل وغير المؤجل يتبين لنا أنه إذا ما تم تحديد تاريخ بدء سريان العقد ومدة سريانه والسن فى تاريخ التعاقد فلا نحتاج بعد ذلك لمعرفة ما إذا كان العقد مؤجلا أو غير مؤجل ففى الحالتين فإن القسط الوحيد الصافى للوثيقة:

م عند بدء سريان الوثيقة-م عند بدء السريان+مدة السريان
=مبلغ التأمين× ـــ
د للسن فى تاريخ التعاقد

ولنا أن نلاحظ أيضا العلاقة بين العقود المؤقتة والعقود لمدى الحياة، إذ أنه يمكن النظر إلى العقد المؤقت لمدة (ن) من السنوات (غير المؤجل) بأنه عقد لمدى الحياة (غير مؤجل) مطروحا منه عقد لمدى الحياة مؤجل (ن) من السنوات، أى أن:

$$\text{أس١ : ن|} = \frac{\text{مـ س}}{\text{دس}} - \frac{\text{مـ س+ن}}{\text{دس}} = \text{أس - ن|أس}$$

كما يمكن النظر إلى العقد المؤقت لمدة ن من السنوات والمؤجل م من السنوات بأنه عقد لمدى الحياة مؤجل م من السنوات مطروحا منه عقد لمدى الحياة مؤجل م+ن من السنوات أى أن

$$\text{م|أس١ : ن|} = \frac{\text{مـ س+ن}}{\text{دس}} - \frac{\text{مـ س+م+ن}}{\text{دس}} = \text{م|أس - م+ن|أس}$$

مثال ٣: أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مؤقت لمدة ٢٠ عاما مبلغه ٥٠٠٠ جنيه (يؤدى المؤمن مبلغ التأمين فى حالة الوفاة فى أى سنة خلال فترة العشرين عاما) لشخص فى تمام السن ٣٠.

الحل: فى هذا المثال فإننا أمام عقد تأمين مؤقت غير مؤجل مبلغه ٥٠٠٠ جنيه على النحو التالى:

س= ٣٠ ومدة سريان التأمين (ن) =٢٠ وحيث أن

$$\text{أس١ : ن|} = \frac{\text{مـ س - مـ س+ن}}{\text{دس}}$$

$$\text{٠,٠ أ٣٠ ١: ٢٠|} = \frac{\text{مـ٣٠- مـ٥٠}}{\text{د٣٠}} = \frac{\text{١٢٣٤٩٥٢,٩٩٠ - ١٠٢٨٩٨٨,١٨٤}}{\text{٣٩٠٥٧٨٢}}$$

$$= \frac{\text{٢٠٥٩٦٤,٨٠٦}}{\text{٣٩٠٥٧٨٢}} = \text{٠,٠٥٢٧٣٣٣}$$

٠,٠القسط الوحيد الصافى للعقد

=٥٠٠٠ × أ٣٠ ١: ٢٠| = ٥٠٠٠ ×٠,٠٥٢٧٣٣٣

=٢٦٣,٧ جنيه.

ونصل إلى ذات النتيجة بدلالة القسط الوحيد الصافى للعقدين الواردين بالمثالين السابقين، حيث أن:

$$\text{أس١ : ن|} = \text{أس - ن|أس}$$

أى أن أ٣٠ ١ :٢٠| = أ٣٠ - ٢٠|أ٣٠
= ٠,٣١٦١٨٥٨ – ٠,٢٦٣٤٥٢٥ = ٠,٠٥٢٧٣٣٣
٠,٠ القسط الوحيد الصافى للعقد=٥٠٠٠ ×٠,٠٥٢٧٣٣٣= ٢٦٣,٧ جنيه.

مثال ٤: أحسب القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين لمدة ٢٠ سنه، مبلغه ٥٠٠٠ جنيه وذلك بالنسبة لشخص سنه عند التعاقد ٤٠ عاما وبإعتبار أن مدة سريان التأمين تبدأ بعد ١٠ سنوات من التعاقد.

الحل: فى هذا المثال فإننا أمام عقد مؤقت مؤجل مبلغه ٥٠٠٠ جنيه، وفيه: س=٤٠ ومدة سريان التأمين (ن)= ٢٠ سنة
فترة التأجيل (م) =١٠ وحيث أن

م|أس١ : ن| = (مـ س+م - مـ س+م+ن) ÷ دس

مـ٤٠+١٠ - مـ٤٠+١٠+٢٠ مـ٥٠ - مـ٧٠

٠,٠ ١٠|أ٤٠ ١: ٢٠| = ———————— = ————

د٤٠ د٤٠

= ١٠٢٨٩٨٨,١٨٤ – ٥٢٥١٩١,٧٠٥ / ٢٨٣٣٠٠١,١٨

= ٥٠٣٧٩٦,٤٧٩ / ٢٨٣٣٠٠١,٨٠٠ = ٠,١٧٧٨٣١٣

٠,٠ القسط الوحيد الصافى للعقد=٥٠٠٠ × ٠,١٧٧٨٣١٣=٨٨٩,١ جنيه

تمرين عام

تعاقد شخص فى تمام السن ٣٥ مع إحدى شركات التأمين على أداء المبالغ الآتية فى حالة وفاته:

١٠٠٠٠ فى حالة وفاته بين تمام السن ٣٥ وتمام السن٥٠
٦٠٠٠ فى حالة وفاته بين تمام السن ٥٠ وتمام السن٦٠
٣٠٠٠ فى حالة وفاته فىأى وقت إعتبارامن تمام السن٦٠

والمطلوب حساب القسط الوحيد الصافى لهذا العقد.

الحــل

يمكن تحليل هذا العقد إلى العقود التالية:

١-عقد مؤقت مدته ١٥ سنة مبلغه ١٠٠٠٠ جنيه.
٢-عقد مؤقت لمدة ١٠ سنوات ومؤجل ١٥ سنة مبلغه ٦٠٠٠ جنيه.

٣-عقد مدى الحياة مؤجل ٢٥ سنة مبلغه ٣٠٠٠ جنيه.
وفى هذه الحالة فإن القسط الوحيد الصافى لمجموع هذه العقود

= ١٠٠٠٠ (مـ٣٥-مـ٥٠) / د٣٥ + ٦٠٠٠ (مـ٥٠ -مـ٦٠) / د٣٥ + ٣٠٠٠ (مـ٦٠) / د٣٥

= (١٠٠٠٠ ١مـ٣٥-١٠٠٠٠ ١مـ٥٠+٦٠٠٠ ٦مـ٥٠-٦٠٠٠ ٦مـ٦٠+٣٠٠٠ ٣مـ٦٠) / د٣٥

= (١٠٠٠٠ ١مـ٣٥ - ٤٠٠٠م٥٠ - ٣٠٠٠م٦٠) / د٣٥ = ١٠٠٠ (١٠ ١مـ٣٥ - ٤مـ٥٠- ٣ مـ٦٠) / د٣٥

كما يمكن تحليل ذات العقد إلى العقود الآتية:
١- عقد مدى الحياة مبلغه ٣٠٠٠ جنيه.
٢- عقد مؤقت مدته ٢٥ سنة بمبلغ ٣٠٠٠ جنيه.
٣-عقد مؤقت مدته ١٥ سنة بمبلغ ٤٠٠٠ جنيه.
وفى هذه الحالة فإن القسط الوحيد الصافى لمجموع هذه العقود

= ٣٠٠٠ (مـ٣٥) / د٣٥ + ٣٠٠٠ (مـ٣٥ -مـ٦٠) / د٣٥ + ٤٠٠٠ (مـ٣٥ -مـ٥٠) / د٣٥

= (٣٠٠٠ ٣مـ٣٥ +٣٠٠٠ ٣مـ٣٥ - ٣٠٠٠ ٣مـ٦٠ + ٤٠٠٠ ٤مـ٣٥ - ٤٠٠٠ ٤مـ٥٠) / د٣٥

= (١٠٠٠٠ ١مـ٣٥-٤٠٠٠ ٤مـ٥٠ - ٣٠٠٠ ٣مـ٦٠) / د٣٥ = ١٠٠٠ (١٠ مـ٣٥ - ٤مـ٥٠ - ٣مـ٦٠) / د٣٥

وهكذا فإن القسط الوحيد الصافى للعقد

= ١٠٠٠ (١٠×١١٩٤٨١٠٤,٤٨٩-٤×١٠٢٨٩٨٨,١٨٤-٣×٨٢٥٨٤٧,٧٢٢) / ٣٣٣١٢٩٥,٤

$$= ١٠٠٠ \times \frac{١١٩٤٨١٠٤,٨٩٠ - ٤١١٥٩٥٢,٧٣٦ - ٢٤٧٧٥٤٣,١٦٦}{٣٣٣١٢٩٥,٤}$$

$$= ١٠٠٠ \times \frac{٥٣٥٤٦٠٨,٩٨٨}{٣٣٣١٢٩٥,٤٠٠} = ١٠٠٠ \times ١,٦٠٧٣٦٥٤ = ١٦٠٧,٣$$ جنيه

المبحث الثالث

العقود المختلطة

(التى تدفع مبالغها فى حالتى الحياة والوفاة)

يقصد بالعقود التى تدفع مبالغها فى حالتى الحياة والوفاة تلك المركبة من نوع أو أكثر من العقود التى تدفع مبالغها فى حالة الوفاة فقط ونوع أو أكثر من العقود التــى تدفع مبالغها فى حالة الحياة فقط وبالتالى فهى عقود مختلطة.

وهكذا، فإذا كان سن المؤمن عليه (س) ومبلغ التأمين جنيه واحد فإن هذا المبلغ يؤدى فى نهاية السنة التى تم فيها الوفاة إذا وقعت بين تمام السن (س) وتمام السن (س+ن)، كما يحصل المؤمن عليه على مبلغ التأمين إذا ظل على قيد الحياة حتى تمام السن (س+ن)، ويرمز للقسط الوحيد الصافى لمثل هذا العقد الذى يسمى بعقد التأمين المختلط بالرمز أس:ن| Ax:n| .

ووفقا للمفهوم السابق فإن عقد التأمين المختلط يتكون من العقدين التاليين:

١- عقد تأمين مؤقت مدته ن من السنوات ومبلغه جنيه واحد.

٢- عقد وقفيه بحته مدته ن من السنوات ومبلغه جنيه واحد ومن هنا فإن :

أس: ن| = القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مؤقت مدته (ن) من السنوات + القسط الوحيد الصافى لعقد وقفية بحته مدته (ن) من السنوات أيضا.

$$= \text{أس}^{1}\text{: ن|} + \text{أس : ن|}^{\,1}$$

$$= \frac{\text{مـ س - مـ س+ن}}{\text{د س}} + \frac{\text{دس+ن}}{\text{د س}} = \frac{\text{مـ س - مـ س+ن + دس+ن}}{\text{د س}}$$

وهكذا يمكن بسهولة حساب القسط الوحيد الصافى لعقد التأمين المختلط بتحليله إلى مكوناته أى إلى عقود بسيطة تدفع فى حالة الوفاة وأخرى تدفع فى حالة الحياة.

وبالطبع فإن مبلغ التأمين الذى يؤدى فى حالة الحياة حتى تمام السن س+ن قد يختلف عن المبلغ الذى يؤدى فى حالة الوفاة بين تمام السن س وتمام السن س+ن فإذا كان المبلغ الذى يؤدى فى حالة الحياة ضعف المبلغ الذى يؤدى فى حالة الوفاة فإن العقد يسمى بعقد التأمين المختلط المضاعف، وإذا كان المبلغ الذى يؤدى فى حالة الحياة نصف الذىيؤدى فىحالة الوفاة فإن العقد يسمى بعقد التأمين المختلط النصفى.

وبالنسبة لعقد التأمين المختلط المضاعف فإن قسطه الوحيد الصافى يحدد بحيث:

$$= \text{أس}^{1}\text{:ن|} + 2\,\text{أس:ن|}$$

$$= \frac{\text{مـ س} - \text{مـ س+ن}}{\text{د س}} + 2\,\frac{\text{د س+ن}}{\text{د س}} = \frac{\text{مـ س} - \text{مـ س+ن} + 2\,\text{د س+ن}}{\text{د س}}$$

وذلك بإعتبار أن المبلغ الذى سيؤدى فى حالة الوفاة بين تمام السن (س) وقبل تمام السن (س+ن) هو جنيه واحد تتم مضاعفته فى حالة الحياة حتى تمام السن س+ن.

ومن ناحية أخرى فإن القسط الوحيد الصافى لعقد التأمين المختلط النصفى يتحدد بحيث :

$$= 2\,\text{دأ س}^{1}\text{:ن|} + \text{أس:ن|}^{1}$$

$$= 2\,\frac{\text{مـ س} - \text{مـ س+ن}}{\text{د س}} + \frac{\text{د س+ن}}{\text{د س}} = \frac{2\,(\text{مـ س} - \text{مـ س+ن}) + \text{د س+ن}}{\text{د س}}$$

وذلك بإعتبار أن المبلغ الذى سيؤدى فى حالة الوفاة بين تمام السن (س) وقبل تمام السن (س+ن) جنيهان، ويؤدى النصف (جنيه واحد) فى حالة الحياة حتى تمام السن (س+ن).

مثال ١: إحسب القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مختلط مبلغه ١٠٠٠٠ جنيه ومدته ٢٠ عاما وذلك لشخص فى تمام السن ٤٠، مع إستخدام أعمدة الرموز الحسابية لجدول الحياة الأمريكى لعام ١٩٥٨.

الحل

$$أ_{س:\overline{ن|}} = \frac{م_س - م_{س+ن} + د_{س+ن}}{د_س}$$

$$\cdot,\cdot أ_{٤٠:\overline{٢٠|}} = \frac{م_{٤٠} - م_{٦٠} + د_{٦٠}}{د_{٤٠}}$$

$$= \frac{١١٥١٨٥٥,٧٧٨ - ٨٢٥٨٤٧,٧٢٢ + ١٣٠٦٧٢٣,٨}{٢٨٣٣٠٠١,٨}$$

$$= \frac{١٦٣٢٧٣١,٨٥٦}{٢٨٣٣٠٠١,٨} = ٠,٥٧٦٣٢٥٧$$

$\cdot,\cdot$ القسط الوحيد الصافى للعقد= ١٠٠٠٠ × $أ_{٤٠:\overline{٢٠|}}$

= ١٠٠٠٠×٠,٥٧٦٣٢٥٧=٥٧٦٣,٢٦ جنيه

مثــال ٢: تعــاقد شخـص فـى تمــام السـن ٣٥ مــع إحــدى شركات التأمين على أن تؤدى له مبلغا معينا فى حالة بلوغه تمام السن ٦٠، فإذا توفى قبل ذلك فإنها تؤدى ضعف المبلغ إلى المستفيدين المحددين بالعقد.

فإذا كان القسط الوحيد الصافى لهذا العقد هو ٦١٣,٧٧٠ جنيه فما هو مبلغ التأمين الذى يؤدى فى كل من حالة الحياة وحالة الوفاة.

الحل: نفرض أن مبلغ التأمين الذى يؤدى فى حالة الحياة جنيه واحد .. فيكون المبلغ الذى يؤدى فى حالة الوفاة جنيهان (تأمين مختلط نصفى)، وفى هذه الحالة فإن:

$$القسط\ الوحيد\ الصافى = \frac{٢\ (م_{٣٥} - م_{٦٠}) + د_{٦٠}}{د_{٣٥}}$$

$$= \frac{٢(١١٩٤٨١٠,٤٨٩ - ٨٢٥٨٤٧,٧٢٢ + ١٣٠٦٧٢٣,٨}{٣٣٣١٢٩٥,٤}$$

= (٧٣٧٩٢٥,٥٣+١٣٠٦٧٢٣,٨)÷ ٣٣٣١٢٩٥,٤

٢٠٤٤٦٤٩,٣÷٣٣٣١٢٩٥,٤٠٠=٠,٦١٣٧٧٠

وحيث أن القسط الوحيد الصافى للعقد هو ٦١٣,٧٧٠ جنيه

$\cdot,\cdot$المبلغ الذى يدفع فى حالة الحياة=٦١٣,٧٧٠ ÷٠,٦١٣٧٧٠=١٠٠٠جنيه

ويكون المبلغ الذى يؤدى فى حالة الوفاة=٢×١٠٠٠=٢٠٠٠جنيه

تمرين

تعاقد شخص فى تمام السن ٣٠ مع إحدى شركات التأمين على أن تؤدى المبالغ الآتية:

جـــــ

١٠٠٠٠ فى حالة وفاته بين تمام السن ٣٠ وتمام السن٥٠
٥٠٠٠ فى حالة وفاته بين تمام السن ٥٠ وتمام السن٦٠
١٠٠٠ فى حالة حياته حتى تمام السن٦٠
٥٠٠ سنويا كمعاش لمدى الحياة يؤدى إعتبارا من تمام السن٦١

الحل: هذا العقد يتكون من العقود البسيطة التالية:

١-عقد تأمين مؤقت مبلغه ١٠٠٠٠ جنيه ومدته ٢٠ سنة.
٢- عقد تأمين مؤقت مؤجل٢٠ سنة مبلغه ٥٠٠٠ جنيه ومدته ١٠ سنوات.
٣-عقد وقفية بحته مبلغه ١٠٠٠ ومدته ٣٠ عاما.
٤-عقد دفعة سنوية عادية لمدى الحياة مؤجلة٣٠عاما ومبلغها٥٠٠ جنيه.

وعلى ذلك فإن القسط الوحيد الصافى لهذا العقد

مـ٣٠-مـ٥٠ / د٣٠ ... مـ٥٠ -مـ٦٠ / د٣٠ ... د٦٠ / د٣٠ ... ن٦١ / د٣٠

= ١٠٠٠٠ (مـ٣٠-مـ٥٠)/د٣٠ + ٥٠٠٠ (مـ٥٠ -مـ٦٠)/د٣٠ + ١٠٠٠ د٦٠/د٣٠ + ٥٠٠ ن٦١/د٣٠

= ٥٠٠ [٢٠(مـ٣٠-مـ٥٠) + ١٠ (مـ٥٠-مـ٦٠) + ٢د٦٠ +ن٦١] / د٣٠

= ٥٠٠ [٢٠مـ٣٠ - ١٠ (مـ٥٠+مـ٦٠) + ٢د٦٠ +ن٦١] / د٣٠

= ٥٠٠ [٢٠×١٢٣٤٩٥٢,٩٩-١٠(١٠٢٨٩٨٨,١٨٤+٨٢٥٨٤٧,٧٢٢) +٢×١٣٠٦٧٢٣,٨+١٥٢٠٣٣٥٥] / ٣٩٠٥٧٨٢

= ٥٠٠ [٢٤٦٩٩٠٥٩,٨-١٨٥٤٨٣٥٩,٠٦+٢٦١٣٤٤٧,٦+١٥٢٠٣٣٥٥] / ٣٩٠٥٧٨٢

= ٥٠٠ [٤٢٥١٥٨٦٢,٤-١٨٥٤٨٣٥٩,٠٦] / ٣٩٠٥٧٨٢ =٥٠٠× ١٣٩٦٧٥٠٣,٣٤ / ٣٩٠٥٧٨٢

= ٥٠٠ × ٣,٥٧٦١٠٩ = ١٧٨٨,٠٦ جنيه

تمارين على الأقساط الوحيدة الصافية

١- إحسب القسط الوحيد الصافى للوثائق الآتية:

-وثيقة تأمين مدى الحياة مبلغها ١٠٠٠ جنيه لشخص عمره ٤٠ عاما.

-وثيقة تأمين مختلط مبلغها ٣٠٠٠ جنيه لشخص عمره ٣٠ عاما.

-وثيقة دفعة معاش قدرها ٥٠٠ جنيه تدفع آخر كل سنة لمدة ٢٠ عاما إعتبارا من تاريخ التعاقد وذلك لشخص عمره ٥٩ عاما.

-وثيقة تأمين مؤقت لمدة ٥ سنوات قيمتها ١٠٠٠ جنيه لشخص فى تمام العمر ٣٠ سنة.

٢- تعاقد شخص عمره ٣٢ عاما مع شركة تأمين لتؤدى المبالغ الآتية:

١٠٠٠ جنيه إذا توفى قبل بلوغه تمام السن ٥٠.

٢٠٠٠ جنيه إذا توفى إعتبارا من بلوغه سن الخمسين وقبل بلوغه سن الستين أو إذا ظل حيا حتى سن الستين.

٥٠٠ جنيه كدفعة سنوية لمدى الحياة فورية إعتبارا من سن ٦١.

والمطلوب حساب القسط الوحيد الصافى لهذه الوثيقة.

٣- تعاقد شخص عمره ٤٠ عاما مع إحدى شركات التأمين على وثيقة تأمين تضمن المبالغ الآتية:

٥٠٠٠ جنيه تدفع للمستفيدين إذا توفىفىأى لحظة بعدبلوغه تمام العمر ٦٠

١٠٠٠ تدفع له فى آخر كل سنة طالما ظل على قيد الحياة بعد إنقضاء فترة تأجيل قدرها ١٩ عاما.

١٠٠٠٠ تدفع للمستفيدين إذا توفى فى أى لحظة إعتبارا من تاريخ التعاقد وقبل بلوغ تمام السن ٦٠ أو إذا ظل على قيد الحياة حتى تمام سن الستين.

٤- إحسب الأقساط الوحيدة الصافية الآتية:

أ٤٠ : ٢٠|١

أ٤٠ ١ : ٢٠|

أ٤٠ : ٢٠|

ء٤٠ : ٢٠|

٢٠|ء..٤٠ : ٢٠|

أ ٤٠

٢٠|أ٤٠

٢٠|ء..٤٠

٥- إثبت العلاقات الآتية:

دس+م

م|ء..س = ——— + م|ءس

دس

ءس =ء..س-١

ء..س: ن| = ١+ءس: ن-١|

ءس: ن| = ءس -ن|ءس

م|ءس: ن| = ءس: م+ن| - ءس: م|

أس: ن| = أس- ن|أس

م|أس١: ن| = م|أس - م+ن| أس

الأقساط السنوية الصافية المتساوية

القسط السنوى للعقود التى تدفع فى حالة حياة - القسط السنوى لعقود تأمينات الحياة - القسط السنوى للعقود المختلطة .

تمهيـــــــد :

غالبا ما يكون من المناسب للمؤمن لهم أداء ما يلتزمون به وفقا لعقد التأمين **على أقساط لمدة مساوية لمدة العقد أو لمدة أقل أو حتى الوفاة أيهما أسبق**،وذلك بدلا من أدائهم لقسط وحيد صافى بمجرد التعاقد .

وقد تكون الأقساط على فترات سنوية أو على فترات دورية تقل عن السنة ، وفى كل الأحوال فانها تؤدى فى أول كل فترة دورية .

فاذا ما إفترضنا من قبيل التبسيط أن الأقساط سنوية ومتساوية المقدار فأنها تشكل دفعة حياة سنوية فورية تؤدى طوال مدة العقد أو الوفاة أيهما أسبق، أو لمدة أقل من مدة العقد أو الوفاة أيهما أسبق وفى كل الأحوال فأن الأقساط السنوية تتحدد من خلال المعادلة الاتية :

القيمة الحالية للأقساط السنوية المتوقع سدادها = مبلغ القسط الوحيد

وهكـذا نتنـاول فى هـذا الفصل كيفيـة حسـاب القسط السنوى المتساوى الصافى والإحتياطيات من خلال أربعة مباحث يهتم أولهما بتحديد القسط السنوى للعقود التى تدفع فى حالة الحياة ، ويهتم الثانى بتحديد القسط السنوى لعقود تأمينات الحياة التى تدفع مبالغها فى حالة الوفاة ، أما الثالث فيهتم بالقسط السنوى للعقود المختلطة ٠

المبحث الأول

القسط السنوى للعقود التى تدفع فى حالة الحياة

نبين فى هذا المبحث كيفية تحديد القسط السنوى المتساوى الصافى لكل من عقود الوقفية البحته وعقود دفعات الحياة السنوية المؤجلة (سواء كانت لمدى الحياة أو لمدة محددة**) أما عقود الدفعات السنوية غير المؤجلة فمن غير الملائم أداء التزام المؤمن له بالنسبة لها على أقساط .**

هذا طالما سنقوم بتحديد القسط السنوى الصافى المتساوى بدلالة القسط الوحيد الصافى فسنفترض أن مبلغ التأمين جنيه واحد .

القسط السنوى الصافى المتساوى لعقد الوقفية البحتة :

وفقا لمفهومنا لهذا العقد فاذا كان عمر مؤمن عليه (س) فأن المؤمن يلتزم بأداء مبلغ التأمين إذا ما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة لمدة (ن) من السنوات ، أى بمجرد بلوغه تمام السن (س + ن) ، فإذا كان مبلغ التأمين جنيه واحد فأن:

$$\text{أس}\ \frac{1}{\text{ن|}} = \frac{\text{دس + ن}}{\text{د س}}$$

وبمساوة القسط الوحيد الصافى لهذا العقد بالقسط السنوى الصافى الذى يؤدى طلما ظل المتعاقد على قيد الحياة لمدة تساوى أو تقل عن (ن) من السنوات ، فأن القسط السنوى يتحدد كما يأتى :

١- إذا كان التقسيط لمدة العقد (ن من السنوات) :

فى هذه الحالة فإن القيمة الحالية للأقساط السنوية كدفعة حياة فورية مؤقتة لمدة (ن) من السنوات أو الوفاة أيهما أسبق $\frac{(\text{ن س - ن س + ن})}{\text{د س}}$ لابد وأن تساوى مبلغ القسط الوحيد الصافى للعقد

(د س + ن ÷ د س) أى أن طن × (ن س - ن س+ن ÷ د س) = (د س+ن ÷ د س)

∴ القسط السنوى لمدة (ن) من السنوات =

= (دس + ن ÷ د س) ÷ (ن س - ن س + ن ÷ د س) =

(د س + ن ÷ د س) × (د س ÷ ن س - ن س + ن) = (د س + ن ÷ ن س- ن س+ن)

٢-اذا كان التقسيط لمدة تقل عن مدة العقد (و من السنوات)

إذا ما إفترضنا أن الأقساط السنوية المتساوية ستؤدى لمدة تقل عن (ن) من السنوات ولتكن(و) من السنوات فأن القيمة الحالية لهذه الأقساط كدفعة سنوية فورية لمدة (و) من السنوات (ن س – ن س+و ÷ د س) لابد وأن تساوى القسط الوحيد الصافى للعقد (د س+ن ÷ د س) أى أن:

ط و × (ن س - ن س + و ÷ د س) = (د س + ن ÷ د س)

∴ القسط السنوى لمدة (و) من السنوات

= (دس + ن ÷ د س) ÷ (ن س - ن س + و ÷ د س)

(د س + ن ÷ د س) × (د س ÷ ن س - ن س + و) = (د س + ن ÷ ن س - ن س+ و)

مثال ١ : تعاقد شخص فى تمام السن ٣٥ مع إحدى شركات التأمين على أن تلتزم بأن تؤدى له ١٠٠٠ جنيه فى حالة بلوغ تمام السن ٦٠ فما هو القسط الصافى المتساوى الذى يؤديه المتعاقد فى أول كل سنه طلما ظل على قيد الحياة وذلك :

١- طوال مدة العقد .

٢- لمدة ٢٠ عاما .

الحـــــــل

فى هذا المثال فاننا بصدد عقد وقفية بحته مبلغه ١٠٠٠ جنيه ومدته ٢٥ عاما لشخص فى تمام السن ٣٥ ، وعلى ذلك فأن القسط السنوى الصافى المتساوى يتحدد كما يلى :

١- القسط السنوى الذى يؤدى طوال مدة العقد (٢٥ عاما)

= ١٠٠٠ × (د ٣٥+٢٥) / (ن٣٥ - ن٣٥+٢٥) = ١٠٠٠ × (د ٦٠) / (ن٣٥ - ن٦٠)

= (١٣٠٦٧٢٣,٨×١٠٠٠) / (٧٣٣٥٢٦٤٨,١ - ٦٥١٠٠٧٨,٨)

= (١٣٠٦٧٢٣,٨×١٠٠٠) / (٥٦٨٤٢٥٦٩,٣) = ١٠٠٠×٠,٠٢٢٩٨٨ = ٢٢,٩٩ جنيه

ويؤدى هذا القسط بمجرد التعاقد وفى أول كل سنه من السنوات التالية بحيث يؤدى آخر قسط فى تمام العمر ٥٩ أو أول السنة التى تقع فيها الوفاة أيها أسبق .

٢- القسط السنوى الذى يؤدى لمدة ٢٠عاما :

= ١٠٠٠ × (د ٦٠) / (ن٣٥ - ن٥٥) = ١٠٠٠ × (١٣٠٦٧٢٣,٨) / (٧٣٣٥٢٦٤٨,١ - ٢٤٠٣٢١٧٧,٤)

= (١٣٠٦٧٢٣,٨×١٠٠٠) / (٤٩٣٢٠٤٧٠,٧) = ١٠٠٠×٠,٠٢٦٤٩٥ = ٢٦,٥ جنيه

ويؤدى هذا القسط بمجرد التعاقد وفى أول كل سنة من السنوات التالية بحيث يؤدى آخر قسط فى تمام السن ٥٤ أو أول السنة التى تقع خلالها الوفاة أيهما أسبق .

القسط السنوى الصافى المتساوى لعقـود الدفعـات لمـدى الحياة المؤجلة:

تتمثل هذه العقود فى عقد الدفعات السنوية لمدى الحياة المؤجلة العادية وعقد الدفعات السنوية لمدى الحياة المؤجل الفورية .

وفى مثل هذه العقود قد تؤدى الأقساط السنوية طوال مدة التأجيل أو لمدة أقل وذلك طلما ظل المتعاقد على قيد الحياة .

ومن خلال مساواة القيمة الحالية للأقساط كدفعة حياة فورية سنوية متساوية بمقدار القسط الوحيد الصافى لكل من العقود المشار اليها فانه يمكن تحديد القسط السنوى الصافى كما يلى :

أولا : بالنسبة لعقد الدفعات مدى الحياة المؤجلة العادية :

وفقا لمفهومنا لهذا العقد فإذا كان عمر المؤمن عليه (س) وفترة التأجيل (م) من السنوات فإن المؤمن يلتزم بأداء مبلغ الدفعة السنوية إعتبارا من إنقضاء سنة على انتهاء فترة التأجيل أى عند تمام السن (س+م+١) وفى نهاية كل من السنوات التالية طالما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة .
وهكذا فإن القسط السنوى الصافى يؤدى طالما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة ولمدة (م) من السنوات أو لمدة تقل عن (م) من السنوات (و من السنوات**) ويتحدد كما يلى :**

١- اذا كان التقسيط لمدة التأجيل (م من السنوات) :

فـى هذه الحالة فإن القيمة الحالية للأقســاط السنويـة كدفعـة حـياة مؤقتة فورية لمدة(م) من السنوات أو الوفاة أيهما أسبق$\left(\frac{\text{ن س} - \text{ن س+م}}{\text{د س}}\right)$

لابد وأن تساوى مبلغ القسط الوحيد الصافى للعقد $\left(\frac{\text{ن س+م+١}}{\text{د س}}\right)$

أى أن:

$$\text{ط م} \times \frac{\text{ن س - ن س+م}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن س+م+١}}{\text{د س}}$$

$$\text{.. القسط السنوى لمدة (م) من السنوات} = \frac{\text{ن س+م+١}}{\text{د س}} \div \frac{\text{ن س - ن س + م}}{\text{د س}}$$

$$= \frac{\text{ن س + م +١}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س - ن س+م}} = \frac{\text{ن س + م +١}}{\text{ن س - ن س+ م}}$$

٢-اذا كان التقسيط لمدة أقل من مدة التأجيل (و من السنوات)
حيــث أن القيمــة الحالــية للأقســاط السنوية المتساوية كدفعة حياة

$$\text{مؤقتة فورية لمدة (و) من السنوات} = \frac{\text{ن س- ن س+ و}}{\text{دس}}$$

يجب أن تساوى مبلغ القسط الوحيد الصافى لعقد الدفعات السنوية العادية

$$\text{لمدى الحياة المؤجل (م) من السنوات } \frac{\text{ن س + و}}{\text{د س}} \text{ فإن :}$$

$$\text{ط و} \times \frac{\text{ن س - ن س+و}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن س+م+١}}{\text{د س}}$$

$$\text{... القسط السنوى لمدة(و)من السنوات} = \frac{\text{ن س+م+١}}{\text{د س}} \div \frac{\text{ن س - ن س+و}}{\text{د س}}$$

$$= \frac{\text{ن س+م+١}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س - ن س+و}} = \frac{\text{ن س+م+١}}{\text{ن س- ن س+و}}$$

ثانيا : بالنسبة لعقد الدفعات مدى الحياة المؤجلة الفورية :

لا تختلف هذه العقود عن مثيلتها العادية إلا من حيث أن الدفعة الأولى تؤدى بمجرد إنتهاء فترة التأجيل ثم فى أول كل من السنوات التالية طلما ظل المتعاقد علىقيد الحياة وبالتالىفأن القسط الوحيدالصافى يكون ($\frac{\text{ن س+م}}{\text{د س}}$) ، وهكذا فإن القسط السنوى المتساوى يتحدد كما يلى :

١- إذا كان التقسيط لمدة التأجيل (م من السنوات):

حيث أن القيمة الحالية للأقساط السنويـة المتساويـة كدفعـة حــياة مؤقتة فورية لمدة (م) من السنوات أو الوفاة أيهما أسبق($\frac{\text{ن س- ن س+م}}{\text{د س}}$)

لابد وأن تساوى مبلغ القسط الوحيد الصافى للعقد ($\frac{\text{ن س + م}}{\text{د س}}$) فإن:

$$\text{ط م} \times \frac{\text{ن س - ن س + م}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن س + م}}{\text{د س}}$$

...القسط السنوى لمدة (م) من السنوات= $\frac{\text{ن س+ م}}{\text{د س}} \div \frac{\text{ن س - ن س+ م}}{\text{د س}}$

$$= \frac{\text{ن س + م}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س - ن س + م}} = \frac{\text{ن س + م}}{\text{ن س - ن س+م}}$$

٢- اذا كان التقسيط لمدة أقل من مدة التأجيل (و من السنوات)

حيث أن القيمة الحالية للأقساط السنوية المتساوية كدفعــة حــياة مؤقتة فورية لمدة (و) من السنوات ($\frac{\text{ن س - ن س + و}}{\text{د س}}$) لابد وأن تساوى

القسط الوحيد الصافى للعقد ($\frac{\text{ن س + م}}{\text{د س}}$) فإن:

$$\text{ط و} \times \frac{\text{ن س - ن س + و}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن س + م}}{\text{د س}}$$

أى أن

القسط السنوى لمدة (و) من السنوات = $\frac{\text{ن س + م}}{\text{د س}} \div \frac{\text{ن س- ن س+و}}{\text{د س}}$

$$= \frac{\text{ن س+م}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س - ن س+و}} = \frac{\text{ن س + م}}{\text{ن س- ن س+و}}$$

ملاحظة : لاحظ فى الدفعات لمدى الحياة أن البسط هو دائما (ن) للسن فى تاريخ إستحقاق الدفعة الأولى .

مثال ٢ : أوجد القسط السنوى الصافى المتساوى الذى يؤديه شخص فى تمام السن ٣٠ تعاقد مع إحدى شركات التأمين على أن تؤدى له ٥٠٠ جنيه سنويا كدفعة لمدى الحياة تبدأ إعتبارا من بلوغه تمام الستين ، وذلك فى الحالتين الآتيتين :

١- إذا كان القسيط لمدة التأجيل (٣٠عاما) .

٢- إذا كان التقسيط لمدة ١٥ عاما فقط .

الحـــــل

العقد هنا عقد دفعة حياة فورية قدرها ٥٠٠ جنيه ومؤجلة ٣٠ عاما، وعلى هذا يتحدد القسط السنوى كما يلى :

١- إذا كان التقسيط لمدة التأجيل (٣٠ عاما) فأن :

القسط السنوى الصافى = $\text{٥٠٠} \times \frac{\text{ن٦٠}}{\text{ن٣٠ - ن٦٠}}$

$$= \text{٥٠٠} \times \frac{\text{١٦٥١٠٠٧٨,٨}}{\text{٩١٦٩٨٤٦١,٨} - \text{١٦٥١٠٠٧٨,٨}} = \frac{\text{٥٠٠} \times \text{١٦٥١٠٠٧٨,٨}}{\text{٧٥١٨٨٣٨٣}}$$

= ٠,٢١٩٥٨٢٨ × ٥٠٠ = ١٠٩,٧٩ جنيه

٢- إذا كان التقسيط لمدة ١٥ عاما فقط :

ن٦٠

القسط السنوى الصافى = ٥٠٠ × ـــــــــــ

ن٣٠ - ن٤٥

= ٥٠٠ × ١٦٥١٠٠٧٨,٨ / (٩١٦٩٨٤٦١,٨ - ٤٤٤٥٥١٦٤,١) = ١٦٥١٠٠٧٨,٨×٥٠٠ / ٤٧٢٤٣٢٩٧,٧

= ٥٠٠ × ٠,٣٤٩٤٦٩٢ = ١٧٤,٧٤ جنيه

مثال ٣ : أوجد القسط السنوى الصافى المتساوى لعقد دفعة حياة عادية قدرها ١٠٠٠ جنيه مؤجلة ٢٠ عاما لشخص فى تمام السن ٤٠ وذلك إذا كان التقسيط :

١- لمدة التأجيل .

٢- لمدة ١٠ سنوات فقط .

الحـــــل

١- إذا كان التقسيط لمدة التأجيل (٢٠عاما):

ن٤٠+٢٠+١

القسط السنوى الصافى= ١٠٠٠ × ـــــــــــ

ن٤٠- ن٤٠+٢٠

= ١٠٠٠ × ن٦١ / (ن٤٠ - ن٦٠) = ١٠٠٠ × ١٥٢٠٣٣٥٥ / (٥٧٧١٩٣٤٧,٤ - ١٦٥١٠٠٧٨,٨)

= ١٠٠٠ × ١٥٢٠٣٣٥٥ / ٤١٢٠٩٢٦٨,٦ = ١٠٠٠×٠,٣٦٨٩٣٠٤=٣٦٨,٩٣ جنيه

٢- إذا كان التقسيط لمدة ١٠ سنوات فقط:

ن٦١

القسط السنوى الصافى = ١٠٠٠ × ـــــــــــ

ن٤٠ - ن٥٠

= ١٠٠٠× ١٥٢٠٣٣٥٥ / (٥٧٧١٩٣٤٧,٤ ــ ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩) = ١٥٢٠٣٣٥٥×١٠٠٠ / ٢٤٤٢٤٣٩٦,٥

= ١٠٠٠ × ٠,٦٢٢٤٦٥٩ = ٦٢٢,٤٧ جنيه

*القسط الصافى لعقود الدفعات المؤقتة المؤجلة :

تتمثل هذه العقـود فى عقـود الدفعـات المؤقتـة المؤجلة العادية وعقود الدفعات المؤقتة المؤجلة الفورية ، وفى مثل هذه العقود فإن الأقســاط السنويـة تـؤدى طلـما ظل المؤمـن عليــه على قيد الحياة لمدة التأجيل (م من السنوات) أو لمدة أقل (و من السنوات).

ومن خــلال مساواة القيمـة الحالية للأقساط بمقدار القسـط الوحيد الصافى يتم تحديد القسط السنوى كما يلى :

أولا : بالنسبة لعقد الدفعات المؤقتة المؤجلة العادية :

وفقا لمفهوم هذه العقود فإذا كان عمر المؤمن عليه (س) وفترة التأجيل (م) من السنوات فإن المؤمن يلتزم بأداء الدفعة السنوية الأولى إعتبارا من إنقضاء سنة على إنتهاء فترة التأجيل، أى عند بلوغ المؤمن عليه تمام السن (س+م+١) وفى نهاية كل من السنوات التالية حتى (ن) من من السنوات أو الوفاة أيهما أسبق ، وهكذا فأن القسط الوحيد الصافى

ن س+م+١ - ن س+م+ن+١
= ــــــــــــــــــــــــــــــــ
د س

ويؤدى القسط السنوى لهذا العقد إما على مدة تساوى مدة التأجيل (م من السنوات) أو لمدة أقل من مدة التأجيل (و من السنوات) ويتحدد كما يلى :

١- إذا كان التقسيط لمدة التأجيل (م من السنوات)

فى هذه الحالة فأن القيمة الحالية للأقساط السنوية المتساوية كدفعة
ن س- ن س+م
حياة مؤقتة فورية لمدة (م) من السنوات(ــــــــــــ) لابد وأن تساوى
د س
مبلغ القسط الوحيد الصافى للعقد ، أى أن :

$$\text{ط م} \times \frac{\text{ن س} - \text{ن س+م}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن س+م+١} - \text{ن س+م+ن+١}}{\text{د س}}$$

٠,٠ القسط السنوى لمدة (م) من السنوات

$$= \frac{\text{ن س+م+١} - \text{ن س+م+ن+١}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س} - \text{ن س+م}}$$

$$= \frac{\text{ن س+م+١} - \text{ن س+م+ن+١}}{\text{ن س} - \text{ن س+م}}$$

٢- اذا كان التقسيط لمدة أقل من مدة التأجيل (و من السنوات)

بمساواة القيمة الحالية للأقساط فى هذه الحالة بالقسط الوحيد الصافى للعقد فان :

$$\text{ط و} \times \frac{\text{ن س} - \text{ن س+و}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن س+م+١} - \text{ن س+م+ن+١}}{\text{د س}}$$

٠,٠القسط السنوى لمدة (و) من السنوات

$$= \frac{\text{ن س+م+١} - \text{ن س+م+ن+١}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س} - \text{ن س+و}}$$

$$= \frac{\text{ن س+م+١} - \text{ن س+م+ن+١}}{\text{ن س} - \text{ن س+و}}$$

ثانيا : بالنسبة لعقد الدفعات المؤقتة المؤجلة الفورية :

لا يختلف الأمر هنا عنه بالنسبة للدفعات المماثلة العادية إلا من حيث أن القسط الوحيد الصافى للدفعة المؤقتة المؤجلة الفورية

$$= \frac{\text{ن س+م- ن س+م+ن}}{\text{د س}}$$

على ذلك فأن القسط السنوى يتحدد كما يلى :

١- إذا كان التقسيط لمدة التأجيل (م من السنوات) :

$$\text{ط م} \times \frac{\text{ن س - ن س+م}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن س+م - ن س+م+ن}}{\text{د س}}$$

., . القسط السنوى لمدة (م) من السنوات

$$= \frac{\text{ن س+م - ن س+م+ن}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س - ن س+م}} = \frac{\text{ن س+م - ن س+م+ن}}{\text{ن س - ن س+م}}$$

٢- اذا كان التقسط لمدة تقل عن مدة التأجيل (و من السنوات)

$$\text{ط و} \times \frac{\text{ن س - ن س+و}}{\text{د س}} = \frac{\text{ن س+م - ن س+م+ن}}{\text{د س}}$$

., . القسط السنوى لمدة (و) من السنوات

$$= \frac{\text{ن س+م - ن س+م+ن}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س - ن س+و}} = \frac{\text{ن س+م - ن س+م+ن}}{\text{ن س - ن س+و}}$$

مثال ٤ : أوجد القسط السنوى الصافى المتساوى الذى يؤديه شخص فى تمام السن ٤٠ تعاقد مع إحدى شركات التأمين على أن تؤدى له ٥٠٠ جنيه سنويا كدفعة عادية مؤجلة ٢٠ عاما ومؤقتة لمدة ١٥ عاما ، وذلك فى الحالتين الآتيتين :

١- إذا كانت مدة التقسيط لمدة التأجيل (٢٠ عاما).

٢- إذا كانت مدة التقسيط ١٠ سنوات فقط ،

الحـــــل

فى هذا المثال فأن الدفعة عادية مبلغها٥٠٠ جنيه وفيها س=٤٠، م=٢٠، ن=١٥، و=١٠.. وعلى ذلك فأن القسط السنوى يتحدد كما يلى :

١- القسط السنوى لمدة ٢٠ عاما

= ٥٠٠ × (ن س+م+١ - ن س+م+ن+١) / (ن س - ن س+م) = ٥٠٠ × (ن٦١ - ن٧٦) / (ن٤٠ - ن٦٠)

= ٥٠٠ × (١٥٢٠٣٣٥٥ – ٢٧٦٦٣٧٥,٦) / (٥٧٧١٩٣٤٧,٤ – ١٦٥١٠٠٧٨,٨)

= ٥٠٠ × ١٢٤٣٦٩٧٩,٤ / ٤١٢٠٩٢٦٨,٦ = ٥٠٠ × ٠,٣٠١٨٠٠٥ = ١٥٥,٩ جنيه

٢- القسط السنوى لمدة ١٠ سنوات

= ٥٠٠ × (ن س+م+١ - ن س+م+ن+١) / (ن س - ن س+و) = ٥٠٠ × (ن٦١ - ن٧٦) / (ن٤٠ - ن٥٠)

= ٥٠٠ × (١٥٢٠٣٣٥٥ – ٢٧٦٦٣٧٥,٦) / (٥٧٧١٩٣٤٧,٤ – ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩)

= ٥٠٠ × ١٢٤٣٦٩٧٩,٤ / ٢٤٤٢٤٣٩٦,٥ = ٥٠٠ × ٠,٥٠٩٢٠٣١ = ٢٥٤,٦ جنيه

مثال ٥ : مـا هـو القسط السنوى فى المثال السابق لو كانت الدفعة المؤقتة المؤجلة دفعة فورية .

الحــــل

١- القسط السنوى لمدة ٢٠ عاما

= ٥٠٠ × (ن س+م - ن س+م+ن) / (ن س - ن س+م) = ٥٠٠ × (ن٦٠ - ن٧٥) / (ن٤٠ - ن٦٠)

= ٥٠٠× (١٦٥١٠٠٧٨,٨ – ٣٢١٦٣٠٩,١) / (٥٧٧١٩٣٤٧,٤ – ١٦٥١٠٠٧٨,٨) = ٥٠٠ × ١٣٢٩٣٧٦٩,٧ / ٤١٢٠٩٢٦٨,٦

= ٥٠٠ × ٠,٣٢٢٥٩١٧ = ١٦١,٣ جنيه

٢- القسط السنوى لمدة ١٠ سنوات

ن س+م - ن س+م+ن   ن٦٠ -

ن٧٥ = ٥٠٠ × ـــــــــــــــــــ = ٥٠٠ × ـــــــــــــ

ن س - ن س+و   ن٤٠ - ن٥٠

= ٥٠٠× ١٦٥١٠٠٧٨,٨ – ٣٢١٦٣٠٩,١ = ٥٠٠ × ١٣٢٩٣٧٦٩,٧

٥٧٧١٩٣٤٧,٤ – ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩   ٢٤٤٢٤٣٩٦,٥

= ٥٠٠ × ٠,٣٢٢٥٩١٧ = ١٦١,٣ جنيه

المبحث الثانى

القسط السنوى لعقود تأمينات الحياة
التى تؤدى مبالغها فى حالة الوفاة فقط

تتمثل عقود تأمينات الحياة فى عقدى التأمين لمدى الحياة المؤجل وغير المؤجل وعقدى التأمين المؤقت المؤجل وغير المؤجل .

وعلى النحو الذى رأيناه فى المبحث السابق فإن القسط السنوى الصافى المتساوى يتحدد بمساواة القيمة الحالية للأقساط بالقسط الوحيد الصافى الذى درسنا كيفية تحديده بإفتراض أن مبلغ التأمين جنيه واحد وباستخدام أعمدة الإستبدال أو الرموز الحسابية لجدول الحياة .

وبحكم طبيعة عقود تأمينات الحياة فإن الأقساط السنوية تؤدى إما لمدى الحياة أو لعدد محدود من السنوات طالما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة ، **فإذا كانت الأقساط لمدى الحياة فانها تعتبر دفعة حياة لمدى الحياة فورية (ن س / د س) أما اذا كانت مؤقتة فانها تعتبر دفعة حياة فورية مؤقتة لمدة ن من السنوات ((ن س - ن س+ن) / د س)**

وهكذا يتحدد القسط السنوى لكل من عقود تأمينات الحياة على النحو التالى :

*القسط السنوى الصافى لعقود التأمين لمدى الحياة :

تتمثل هذه العقود فى عقد التأمين لمدى الحياة (غير المؤجل) وعقد التأمين لمدى الحياة المؤجل (ن) من السنوات .

ومن خلال مساواة القيمة الحالية للأقساط السنوية بمقدار القسط الوحيد الصافى لكل من العقدين المشار إليهما فإنه يمكن بسهولة تحديد القسط السنوى كما يلى :

أولا : بالنسبة لعقد التأمين لمدى الحياة (غير المؤجل):

وفقا لمفهومنا لهذا العقد فإذا كان عمر المؤمن عليه (س) ومبلغ التأمين جنيه واحد فان القسط الوحيد الصافى

$= \frac{\text{م س}}{\text{د س}}$ وعلى ذلك فان القسط السنوى يتحدد وفقا للآتى :

١- إذا كان التقسيط لمدى الحياة:

$$\text{ط} \times \frac{\text{ن س}}{\text{د س}} = \frac{\text{مـ س}}{\text{د س}}$$

∴ القسط السنوى لمدى الحياة $= \frac{\text{مـ س}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س}} = \frac{\text{مـ س}}{\text{ن س}}$

ويؤدى هذا القسط فى أول كل سنة إعتبارا من تاريخ التعاقد وطلما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة .

٢- إذا كان التقسيط لمدة (ن) من السنوات

$$\text{ط ن} \times \frac{\text{ن س} - \text{ن س+ن}}{\text{د س}} = \frac{\text{مـ س}}{\text{د س}}$$

∴ القسط السنوى لمدة(ن) من السنوات $= \frac{\text{مـ س}}{} \times \frac{\text{د س}}{}$

د س ن س-ن س+ن

$$= \frac{\text{مـ س}}{\text{ن س - ن س+ن}}$$

ويؤدى هذا القسط فى أول كل سنة إعتبارا من تاريخ التعاقد ولمدة (ن) من السنوات أو الوفاة أيهما أسبق ، أى أن آخر قسط يؤدى فى تمام السن (س+ن-١) أو الوفاة أيهما أسبق .

ثانيا : بالنسبة لعقد التأمين لمدى الحياة المؤجل:

فى هذا العقد يؤدى مبلغ التأمين فى حالة الوفاة فى أى لحظة تالية لإنقضاء فترة التأجيل وعلىذلك فإذا كان العمر المؤمن عليه (س) وفترة التأجيل(م)من سنوات فإن القسط الوحيدالصافىلكل جنيه من مبلغ التأمين

$$= \frac{\text{مـ س+م}}{\text{د س}}$$

وبمساواة القسط الوحيد الصافى بالقيمة الحالية للأقساط السنوية المحتمل أدائها كدفعة فورية لمدى الحياة أو لعدد محدود من السنوات فإن القسط السنوى يتحدد كما يلى :

١- إذا كان التقسيط لمدى الحياه :

$$\text{ط} \times \frac{\text{ن س}}{\text{د س}} = \frac{\text{مـ س+م}}{\text{د س}}$$

$$\therefore \text{ القسط السنوى لمدى الحياة } = \frac{\text{مـ س+م}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س}} = \frac{\text{مـ س+م}}{\text{ن س}}$$

يؤدى هذا القسط السنوى فى أول كل سنة إعتبارا من تاريخ التعاقد وطلما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة .

٢- اذا كان التقسيط لمدة (ن) من السنوات :

$$\text{ط ن} \times \frac{\text{ن س} - \text{ن س+ن}}{\text{د س}} = \frac{\text{مـ س+م}}{\text{د س}}$$

$$\therefore \text{القسط السنوى لمدة (ن) من السنوات} = \frac{\text{مـ س+م}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س} - \text{ن س+ن}}$$

$$= \frac{\text{مـ س+م}}{\text{ن س} - \text{ن س+ن}}$$

ويؤدى هذا القسط السنوى فى أول كل سنة إعتبارا من تاريخ التعاقد ولمدة (ن) من السنوات أو الوفاة أيهما أسبق ، أى أن القسط الأخير يؤدى فى تمام السن (س+ن+١) أو أول السنة التى تقع فيها الوفاة أيهما أسبق.

مثال ٦ : إحسب القسط السنوى الصافى المتساوى الذى يؤدى لمدى الحياة لعقد تأمين لمدى الحياه مبلغه ١٠٠٠ جنيه لشخص فى تمام السن ٣٠ وذلك فى الحالتين الآتيتين :

١- يسرى التأمين فور التعاقد ٢- يسرى التأمين بعد ١٠ سنوات

الحـــل

القسط السنوى لمدى الحياه للعقد الفورى

$$= 1000 \times \frac{\text{مـ س}}{\text{ن س}} = 1000 \times \frac{\text{مـ}_{30}}{\text{ن}_{30}} = 1000 \times \frac{1234952.99}{91698461.8}$$

$$= 1000 \times 0.0134675 = 13.47 \text{ جنيه}$$

القسط السنوى لمدى الحياة للعقد المؤجل

$$= 1000 \times \frac{\text{مـ س+م}}{\text{ن س}} = 1000 \times \frac{\text{مـ}_{30+10}}{\text{ن}_{30}} = 1000 \times \frac{\text{مـ}_{40}}{\text{ن}_{30}}$$

$$= 1000 \times \frac{1151855.778}{91698461.8} = 1000 \times 0.0125613 = 12.56 \text{ جنيه}$$

مثـال ٧ : مـا هـو القسط السنوى الصافى المتساوى فى المثال السابق لو كان سيؤدى لمدة ٢٠ عاما فقط .

الحـــــل

القسط السنوى لمدة ٢٠ عاما للعقد غير المؤجل

$$= \text{١٠٠٠} \times \frac{\text{مـ س}}{\text{ن س - ن س+ن}} = \text{١٠٠٠} \times \frac{\text{مـ٣٠}}{\text{ن٣٠ - ن٥٠}}$$

$$= \text{١٠٠٠} \times \frac{\text{١٢٣٤٩٥٢,٩٩}}{\text{٩١٦٩٨٤٦١,٨ ـ ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩}}$$

$$= \frac{\text{١٢٣٤٩٥٢,٩٩} \times \text{١٠٠٠}}{\text{٥٨٤٠٣٥١٠,٩}} = \text{١٠٠٠} \times \text{٠,٠٢١١٤٥١} = \text{٢١,١٥ جنيه}$$

القسط السنوى لمدة ٢٠ عاما للعقد المؤجل

مـ س+م ــــــــ مـ ٤٠

= ١٠٠٠ × ــــــــــــ = ١٠٠٠ × ــــــــــ

ن س - ن س+ن ــــــ ن٣٠ - ن٥٠

= ١٠٠٠ × ١١٥١٨٥٥,٧٧٨

ـــــــــــــــــــــــــــــــــــ

٩١٦٩٨٤٦١,٨ ـــ ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩

= ١٠٠٠ × ١١٥١٨٥٥,٧٧٨ = ١٠٠٠ × ٠,٠١٩٧٢٢٣ = ١٩,٧٢ جنيه

٥٨٤٠٣٥١٠,٩

*القسط السنوى الصافى لعقود التأمين المؤقت :

تتمثل هذه العقود فى عقود التأمين المؤقت (غير المؤجل) وعقد التأمين المؤقت المؤجل (م) من السنوات .

وبحكم أن هذه العقود مؤقتة فإن القسط السنوى يكون بدوره مؤقتا لمدة مساوية لمدة العقد (ن من السنوات) أو لمدة أقل (و من السنوات) ويتحدد هذا القسط الوحيد الصافى بالقيمة الحالية للأقساط على النحو التالى :

أولا : بالنسبة لعقد التأمين المؤقت (غير المؤجل)

وفقـــا لمفهـوم هـذا العقـد فـاذا كـان عمرالمؤمن عليـه (س) ومدة التأمين(ن) من السنوات ومبلغ التأمين جنيه واحد فإن القسط الوحيد الصافى

مـ س- مـ س+ن

=ــــــــــ ، وعلى ذلك فأن القسط السنوى يتحدد وفقا للآتى:

د س

١- اذا كان التقسيط لمدة العقد (ن من السنوات)

ن س - ن س+ن ـــ مـ س - مـ س+ن

ط ن × ــــــــــــ = ــــــــــــــ

د س ـــ د س

٠,٠ القسط السنوى لمدة (ن) من السنوات

مـ س - مـ س+ن ـــ د س ـــ مـ س - مـ س+ن

= ــــــــــــ × ــــــــــــ = ــــــــــــــ

د س   ن س - ن س+ن   ن س - ن س+ن

٢- اذا كان التقسيط لمدة تقل عن مدة العقد (و من السنوات)

ن س - ن س+و   مـ س - مـ س+ن

ط و × ———————— = ————————

د س   د س

٠,٠القسط السنوى لمدة (و) من السنوات

مـ س - مـ س+ن   د س   مـ س - مـ س+ن

= ———————— × ———————— =

————————

د س   ن س - ن س+و   ن س - ن س+و

مثال ٨: أوجـد القسـط السنوى الصافى الذى يؤدى لمدة ٢٠ عاما لعقد تأمـين مبلغه ١٠٠٠ مؤقـت ٢٠ عامـا لشخص فى تمام السن ٣٥ وذلك فى الحالتين الآتيتين:

١- العقد المؤقت غير مؤجل   ٢ - العقد المؤقت مؤجل ٥ سنوات.

الحل

١- إذا كان العقد المؤقت غير مؤجل

مـ ٣٥ - مـ ٥٥

القسط السنوى لمدة ٢٠عاما = ١٠٠٠ ————————

ن ٣٥ - ن ٥٥

= ١٠٠٠ × ١١٩٤٨١٠,٤٨٩ – ٩٣٩٣٦٣,٣٨٤ / ٧٣٣٥٢٦٤٨,١ – ٢٤٠٣٢١٧٧,٤ = ١٠٠٠ × ٢٥٥٤٤٧,١٤١ / ٤٩٣٢٠٤٧٠,٧

= ١٠٠٠ × ٠,٠٠٥١٧٩٣ = ٥,١٨ جنيه

٢- إذا كان العقد المؤقت مؤجل ٥ سنوات :

مـ ٤٠ - مـ ٦٠

القسط السنوى لمدة ٢٠ عاما = ١٠٠٠ ————————

ن ٣٥ - ن ٥٥

= ١٠٠٠ × ١١٥١٨٥٥,٧٧٨ – ١٠٢٨٩٨٨,١٨٤ / ٤٩٣٢٠٤٧٠,٧

= ١٠٠٠ × ١٢٢٨٦٧,٥٩٤ / ٤٩٣٢٠٤٧٠,٧ = ١٠٠٠ × ٠,٠٠٢٤٩١١ = ٢,٤٩ جنيه

المبحث الثالث

القسط السنوى للعقود المختلطة

تتكون العقود المختلطة من نوع أو أكثر من العقود التى تؤدى مبالغها فى حالة الحياة ونوع أو أكثر من العقود التى تودى مبالغها فى حالة الوفاة، وعلى ذلك فإن هذه العقود عبارة عن عقود مختلطة تؤدى مبالغها فى حالة الوفاة خلال مدة معينة أو فى حالة الحياة حتى إنتهاء هذه المدة .

وهكذا رأينا أن القسط الوحيد الصافى لعقد التأمين المختلط يتحديد بسهولة بتحليله إلى العقود البسيطة التى يتكون منها ، أى أن القسط الوحيد الصافى للعقد المختلط يتحدد بمجموع الأقساط الوحيدة الصافية للعقود البسيطة التى يتكون منها العقد المختلف .

وبمساواة القسط الوحيد الصافى للعقد المختلط بالاقساط السنوية التى تؤدى لمدة هذا العقد أو لمدة أقل يمكن تحديد القسط السنوى .

وعلى ذلك فلو إفترضنا أن سن التعاقد (س) وأن مبلغ التأمين جنيه واحد يؤدى فى حالة الوفاة خلال (ن) من السنوات أو فى حالة الحياة حتى تمام السن (س+ن) فإن القسط السنوى يتحدد كما يلى :

١- إذا كان التقسيط لمدة العقد (ن من السنوات) :

$$\text{ط ن} \times \frac{\text{ن س} - \text{ن س+ن}}{\text{د س}} = \frac{\text{مـ س} - \text{مـ س+ن} + \text{د س+ن}}{\text{د س}}$$

٠,٠ القسط السنوى لمدة (ن) من السنوات

$$= \frac{\text{مـ س} - \text{مـ س+ن} + \text{د س+ن}}{\text{د س}} \times \frac{\text{د س}}{\text{ن س} - \text{ن س+ن}}$$

$$= \frac{\text{مـ س} - \text{مـ س+ن} + \text{د س+ن}}{\text{ن س} - \text{ن س+ن}}$$

٢- إذا كان التقسيط لمدة تقل عن مدة العقد (و من السنوات) :

ن س - ن س+و　　　　مـ س - مـ س+ن + د س+ن
ط و × ———————— = ——————————————
د س　　　　　　　　　　د س

القسط السنوى لمدة (و) من السنوات

مـ س - مـ س+ن + د س+ن　　　　د س
= —————————————— × ————————
د س　　　　　　　　　　ن س - ن س+و

مـ س - مـ س+ن + د س+ن
= ——————————————
ن س - ن س+و

مثال ٩ : تعاقد شخص فى تمام السن ٤٠ مع إحدى شركات التأمين على أن تؤدى فى حالة وفاته قبل الستين ١٠٠٠٠ جنيه فإذا عاش حتى الستين فتؤدى له ٥٠٠٠ جنيه . فما هو القسط الذى يؤدى طوال مدة العقد وما هو القسط السنوى بفرض أن التقسيط لمدة ١٠ سنوات فقط .

الحـــــل

١- القسط السنوى الذى يؤدى طوال مدة العقد (٢٠ عاما)

١٠٠٠٠ (مـ س - مـ س+ن) + ٥٠٠٠ د س+ن
= ——————————————————————
ن س - ن س+ن

٢ (مـ ٤٠ - مـ ٦٠) + د ٦٠
= ٥٠٠٠ × ——————————————
ن ٤٠ - ن ٦٠

= ٥٠٠٠ ×٢ (١١٥١٨٥٥,٧٧٨ ـ ٨٢٥٨٤٧,٧٢٢) + ١٣٠٦٧٢٣,٨
٥٧٧١٩٣٤٧,٤ ـ ١٦٥١٠٠٧٨,٨

= ٥٠٠٠ × ٦٥٢٠١٦,١١٢ + ١٣٠٦٧٢٣,٨
٤١٢٠٩٢٦٨,٦

= ٥٠٠٠ × ١٩٥٨٧٣٩,٩١٢ = ٥٠٠٠ × ٠,٤٧٥٣١٥ = ٢٣٧,٦٦ جنيه
٤١٢٠٩٢٦٨,٦

٢- القسط السنوى الذى يؤدى ١٠ سنوات فقط :

١٠٠٠٠ (مـ٤٠ - مـ ٦٠) + ٥٠٠٠ د٦٠
= ——————————————————
ن ٤٠ - ن ٥٠

= ٥٠٠٠ × ١٩٥٨٧٣٩,٩١٢
٥٧٧١٩٣٤٧,٤ ـ ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩

= ٥٠٠٠ × ١٩٥٨٧٣٩,٩١٢ = ٥٠٠٠ × ٠,٠٨٠١٩٦ = ٤٠٠,٩٨ جنيه
٢٤٤٢٤٣٩٦,٥

مثال ١٠ : تعـاقد شخص فـى تمـام السـن ٣٠ مـع إحـدى شـركات التأمين على أن تؤدى المبالغ الآتية :

١٠٠٠٠ فى حالة وفاته بين تمام السن ٣٠ وقبل بلوغه الـ ٥٠

٥٠٠٠ فى حالة وفاته بين السن ٥٠ وقبل بلوغه الـ ٦٠

٣٠٠٠ فى حالة بلوغه تمام السن ٦٠ .

٥٠٠ دفعة سنوية إعتبارا من بلوغه تمام السن ٦١.

فمـا هـو القسـط السنوى الصـافى الـذى يؤدى لمـدة ٣٠ عاما طالما ظل المتعاقد على قيد الحياة .

الحــــل

(مـ٣٠-مـ٥٠)+٥٠٠٠(مـ ٥٠ - مـ ٦٠)+٣٠٠٠ د٦٠ +٥٠٠ن٦١
القسط = ١٠٠٠٠ ــــــــــــــــــــــــــــــــــــــ
ن ٣٠ - ن ٦٠

٢٠ (مـ٣٠-مـ٥٠)+١٠(مـ٥٠ -مـ٦٠) + ٦ د٦٠ + ن٦١
=٥٠٠ ــــــــــــــــــــــــــــــــــــــ
ن ٣٠ - ن ٦٠

٢٠ مـ٣٠ + ١٠ (مـ ٥٠ - مـ ٦٠) + ٦ د٦٠ + ن٦١
=٥٠٠ ــــــــــــــــــــــــــــــــــــــ
ن ٣٠ - ن ٦٠

= ٥٠٠(٢٠×١٢٣٤٩٥٢,٩٩)-١٠(١٠٢٨٩٨٨,١٨٤+٨٢٥٨٤٧,٧٢٢)+(٦×١٣٠٦٧٢٣,٨)+١٥٢٠٣٣٥٥
٩١٦٩٨٤٦١,٨ ـ ١٦٥١٠٠٧٨,٨

= ٥٠٠ ٢٤٦٩٩٠٥٩,٨ ـ ١٨٥٤٨٣٥٩,٠٦+٧٨٤٠٣٤٢,٨+١٥٢٠٣٣٥٥
٧٥١٨٨٣٨٣

= ٥٠٠ × ٤٧٧٤٢٧٥٧,٦ ـ ١٨٥٤٨٣٥٩,٠٦
٧٥١٨٨٣٨٣

= ٥٠٠× ٢٩١٩٤٣٩٨,٥٤ = ٥٠٠×٠,٣٨٨٢٨٣٣ = ١٩٤,١٤ جنيه
٧٥١٨٨٣٨٣

خلاصة معادلات تحديد الاقساط السنوية الصافية المتساوية

١- البسط دائما هو البسط الخاص بالقسط الوحيد الصافى للعقد .
٢- المقام عبارة عن
ن س للتقسط لمدى الحياة (عقود تأمينات الحياة لمدى الحياة)
ن س-ن س+ن للتقسيط لمدة العقد (عقد الوقفية وعقود الدفعات المؤجلة وعقود تأمينات الحياةالمؤقتة والعقود المختلطة)
ن س-ن س+و للتقسيط لمدة أقل من مدة العقد حيث و < ن

الفصل الخامس عشر

العقود ذات المبالغ أو الأقساط المتغيرة

أقساط العقود ذات المبالغ المتزايدة-
أقساط العقود ذات المبالغ المتناقصة-
الأقساط السنوية المتغيرة .

تمهيد:

إفترضنا فى الفصل الثالث عشر ثبات مبالغ دفعات الحياة السنوية التى تؤدى طالما ظل المؤمن عليه على قيد الحياة ولمدى الحياة أو لعدد محدود من السنوات ، كما إفترضنا أيضا ثبات مبلغ التامين الذى يؤدى فى نهاية السنة التى تقع فيها الوفاة طالما تم ذلك خلال مدة سريان العقد وبغض النظر عن السنة التى تقع فيها الوفاة.

هذا ومن ناحية أخرى فقد إفترضنا فى الفصل الرابع عشر من هذا الباب أن الأقساط السنوية متساوية فلا يختلف مقدارها من سنة أو عدد من السنوات إلى سنة أو عدد آخر من السنوات.

وفى حقيقة الأمر أن مبالغ دفعات الحياة قد لا تكون ثابتة فتتغير من سنة أو عدد من السنوات إلى سنة أو عدد آخر من السنوات سواء بالزيادة أو بالنقص ، **والأمر ذاته بالنسبة لمبلغ التأمين الذى يؤدى فى حالة الوفاة فقد يختلف بالزيادة أو بالنقصان وفقا للسنة التى تقع فيها الوفاه ٠٠ ومن ناحية أخرى فإن الأقساط السنوية قد لا تكون متساوية وأنما تكون متغيرة يتزايد مقدارها أو يتناقص .**

ومن هنا تتناول فى هذا الفصل العقود ذات المبالغ أو الأقساط المتغيرة وذلك فى مباحث ثلاث يهتم أولها بكيفية حساب القسط الوحيد أو القسط السنوى للعقود ذات المبالغ المتزايدة ، ويهتم الثانى بكيفية حساب القسط الوحيد أو القسط السنوى للعقود ذات المبالغ المتناقصة ، أما المبحث الثالث فنخصصه لكيفية تحديد القسط السنوى المتغير سواء فى ذلك المتزايد أو المتناقص .

المبحث الأول

حساب أقساط العقود ذات المبالغ المتزايدة

تصدر هيئات التأمين عقود ذات دفعات حياه يتزايد مقدارها من سنة أو عدد من السنوات إلى سنة أو عدد آخر من السنوات ، كما تصدر عقود تأمين يتزايد فيها مبلغ التأمين الذى يؤدى فى حالة الوفاة كلما وقعت الوفاة فى عمر متأخر .

ولعل الهدف من مثل هذه العقود هو مواجهة الإنخفاض المستمر فى القيمة الحقيقية للنقود مما يتعين معه تزايد مبالغ دفعات الحياه أو رفع مبلغ التأمين الذى يؤدى فى حالة الوفاة مع تزايد الفترة التى تنقضى من تاريخ التعاقد وحتى تاريخ الوفاه .

وسواء تمثل الهدف من مثل هذه العقود فيما ذهبنا إليه أو فى غير ذلك فإننا نتناول فيما يلى كيفية حساب كل من القسط الوحيد الصافى والقسط السنوى المتساوى لتلك العقود :

*عقود دفعات الحياة المتزايدة :

يتحدد القسط الوحيد الصافى لعقود دفعات الحياة المتساوية بمجموع القيم الحالية لكل من الدفعات ، أما القسط السنوى الصافى المتساوى فيحدد بمساواة القسط الوحيد الصافى بالقيمة الحالية للأقساط السنوية المتوقع سدادها .

وتتبع ذات الطريقة لحساب أقساط دفعات الحياه المتزايدة على النحو المبين فيما يلى :

أولا : عقود دفعات الحياة لمدى الحياة المتزايدة :

قد تتميز مبالغ الدفعات فى هذه العقود بالثبات لعدد محدد من السنوات ترتفع بعدها بمقدار ثابت ، وقد تتزايد مبالغ الدفعات سنويا ونفترض للتبسيط أن هذا التزايد يتم بصورة منتظمة .

ولبيان كيفية تحديد أقساط مثل هذه العقود نورد الأمثلة التالية :

مثال ۱ : أوجد القانون الذى يعطى القيمة الحالية (القسط الوحيد الصافى) **لدفعة حياة فورية لشخص فى تمام السن س وذلك إذا كان مقدار الدفعة السنوى ۱۰۰ جنيه لمدة ٥ سنوات ثم يرتفع بعد ذلك إلى ۱٥۰ جنيها سنويا .**

وما هو القسط الوحيد الصافى للدفعة المشار اليها إذا إفترضنا أنها دفعة عادية .

الحـــــــل

القيمة الحالية لهذه الدفعة

= القيمة الحالية لدفعة لمدى الحياة فورية مقدارها۱۰۰ جنيه سنويا + القيمة الحالية لدفعة لمدى الحياة فورية مؤجلة ٥ سنوات مقدارها ٥۰ جنيها سنويا.

وهكذا فان القيمة الحالية (القسط الوحيد الصافى **) للدفعة**

$$=\text{۱۰۰(ء س) +۵۰(۵| ..ء س)} = \text{۱۰۰}\ \frac{\text{ن س}}{\text{د س}} + \text{۵۰}\ \frac{\text{ن س+۵}}{\text{د س}}$$

هذا فإذا إفترضنا أن الدفعة المشار اليها دفعة عادية فان القسط الوحيد الصافى

$$=\text{۱۰۰(ء س) +۵۰(۵| ء س)} = \text{۱۰۰}\ \frac{\text{ن س+۱}}{\text{د س}} + \text{۵۰}\ \frac{\text{ن س+۵+۱}}{\text{د س}}$$

مثال ۲ : أوجد القانون الذى يعطى القسط الوحيد الصافى لدفعة حياة فورية متزايدة لشخص فى تمام السن س وذلك إذا كان مبلغها السنوى الأول جنيه واحد والمبلغ الثانى جنيهان والثالث ثلاثة جنيهات ۰۰وهكذا إلى مدى الحياة **.وما هو القسط الوحيد لو كانت الدفعة عادية .**

الحـــــل

القسط الوحيد الصافى لهذه الدفعة الفورية المتزايدة بانتظام لمدى الحياة عبارة عن مجموع الأقساط الوحيدة لعقود وقفيات بحته سنوية تزيد مبالغها بمقدار جنيه واحد سنويا فيما عدا مبلغ الوقفية الأولى ومقداره جنيه واحد فيستحق فورا .

وهكذا فأن القسط الوحيد الصافى لهذة الدفعة الفورية المتزايدة

= ١+٢ (د س+١ / د س) + ٣ (د س+٢ / د س) + ٠٠ = (د س + ٢د س+١ + ٣د س+٢ + ٠٠) / د س

= ((د س+د س+١+د س+٢+..)+(د س+١+د س+٢+..)+(د س+٢..+)+ ..) / د س

= (ن س + ن س+١ + ن س+٢ + ٠٠٠) / د س = مجـ ن س / د س

هذا فإذا كانت الدفعة عادية فأن القسط الوحيد الصافى يتحدد على هذا الأساس وباتباع الخطوات السابقة حيث = (مجـ ن س + ١) / د س

ثانيا : عقود دفعات الحياة المؤقتة المتزايدة :

دفعات الحياة المؤقتة المتزايدة قد تكون فورية وقد تكون عادية ، ونورد فيما يلى كيفية تحديد القسط الوحيد الصافى لهذه الدفعات من خلال بعض الأمثلة .

مثال ٣ : أوجد القانون الذى يعطى القسط الوحيد الصافى (القيمة الحالية) **لدفعة حياة فورية مؤقته لشخص فى تمام السن س وذلك بافتراض أن هذه الدفعة متزايدة** بحيث يكون المبلغ السنوى الأول جنيه واحد والمبلغ الثانى جنيهان والثالث وثلاثة جنيهات٠٠**وهكذا لمدة٦سنوات .**

وما هو القانون إذا كانت الدفعة المذكورة عادية .

الحـــــــل

فى هذا المثال نجد أن القيمة الحالية للمبلغ الأول جنيه (الدفعة فورية) **وأن المبالغ الباقية تتزايد بمقدار جنيه سنويا إلى أن يصبح**

المبلغ الأخير ن من الجنيهات وهو يستحق فى أول السنة النونية إذا بقى المؤمن عليه على قيد الحياة .

وبمعنى آخر فان القسط الوحيد الصافى المطلوب .

١
=ـــ [د س +٢د س+١ + ٣د س+٢ + ٤د س+٣+ ٥د س+٤+٦د س+٥]
د س

[د س + د س+١ + د س+٢ + د س+٣ + د س+٤ + د س+٥]
[د س+١ + د س+٢ + د س+٣ + د س+٤ + د س+٥]
=١ [+ د س+٢ + د س+٣ + د س+٤ + د س+٥]
ـــ [+ د س+٣ + د س+٤ + د
س+٥]
د س [+ د س+٤ + د
س+٥]
[+ د س+٥]

[ن س - ن س+٦]
= ١ [+ن س +١ - ن س+٦]
ـــ [+ن س +٢ - ن س+٦]
د س [+ن س +٣ - ن س+٦]
[+ن س +٤ - ن س+٦]
[+ن س +٥ - ن س+٦]

١
=ـــ [(ن س+ ن س+١ + ن س+٢ +٠٠٠+ ن س+٥) - ٦ن س+٦]
د س

١
=ـــ (مجـ ن س - مجـ ن س+٦ - ٦ن س+٦)
د س

(مجـ ن س - مجـ ن س+٦ - ٦ن س+٦)
=ـــــــــــــــــــــــــــ
د س

وبهذا فإن القسط الوحيد الصافى لهذا النوع من العقود وبإفتراض انها فورية وأنها مؤقتة لمدة ن من السنوات .

(مجـ ن س - مجـ ن س+ن - ن × ن س+ن)
=ـــــــــــــــــــــــــــ
د س

وهكذا فاذا كانت الدفعة عادية فان القسط الوحيد الصافى

(مجـ ن س+١ - مجـ ن س+ن+١ - ن × ن س+ن+١)

= ــ

د س

أى أن القسط الوحيد الصافى المطلوب للدفعة باعتبارها عادية

(مجـ ن س+١ - مجـ ن س+٧ - ٦ ن س+٧)

= ــ

د س

مثال ٤ : إذا كـانت الـدفعة الفورية على حياة شخص فى تمام السن ٣٠ متزايدة على الصورة:

٥ ٨ ١١ ١٤ ١٧ ٢٠ ... لمدة ١٥ سنة.

أكتب التعبير الرياضى للقيمة الحالية لهذه الدفعة .

الحـــــل

إذا رجعنـــا للمثـــالين ٢ ، ٣ نلاحــظ أن التزايد منتظــم علــى صورة متواليــة عدديــة أساسهــا الواحد الصحـيح ، أما فى هذا المثـال فرغم_ أن التزايد منتظم أيضا إلا أنه على صورة متوالية عددية أساسها (٣) ... ويدعونا هذا إلى تحويل تزايد هذه الدفعة إلى صورة المتوالية العددية التى يكون أساسها (١) وهو أمر يمكن أن نصل إليه بتقسيم الدفعة إلى دفعة فورية ثابتة مقدارها جنيهان سنويا لمدة ١٥ سنة وإلى ٣ دفعات فورية متزايدة على صورة متوالية عددية أساسها الواحد الصحيح ولمدة **١٥ سنة وذلك كما يلى :**

دفعة ثابتة لمدة ١٥ سنة (٢ ٢ ٢ ٢ ...)

دفعة متزايدة لمدة ١٥ سنة ٣(١ ٢ ٣ ٤ ...)

وبهـذا فـإن القيمـة الحاليـة المطلوبـة عبـارة عن مجمـوع القيمـة الحالية للدفعة الثابتة والقيمة الحالية للدفعة المتغيرة .. أى أنـها:

ن ٣٠ - ن ٤٥ مجـ ن٣٠- مجـ ن٤٥-١٥ن٤٥

=٢ ـــــــــــــ + ٣ ــــــــــــــــــــــــــــــ

د ٣٠ د٣٠

هـذا ويمكن أن نصـل إلـى القيمـة الحاليـة المطلـوبة بتقسيمـها إلى دفعة فورية ثابتة مقدارها جنيـهان سنويا لمدة ١٥ سنـة و٣ دفعـات عاديـة متزايده على صورة متوالية عددية أساسها الواحد الصحيح ولمدة ١٤ سنة وذلك كما يلى :

دفعة فورية ثابتة لمدة ١٥ سنة (٥ ٥ ٥ ٥ ...)
دفعة عادية متغيرة لمدة ١٤ سنة ٣ (١ ٢ ٣ ....)

وبهذا فأن القيمة الحالية المطلوبة

$$= ٥\,\frac{\text{ن٣٠ - ن٤٥}}{\text{د٣٠}} + ٣\,\frac{\text{مجـ ن٣١ - مجـ ن٤٥ - ١٤ن٤٥}}{\text{د٣٠}}$$

والنتيجـة واحـدة ويمكـن إثبـات ذلك رياضيـا إذ أن القيمـة الحالية بالطريقة الثانية

$$= ٢\,\frac{\text{ن٣٠ - ن٤٥}}{\text{د٣٠}} + ٣\,\frac{\text{ن٣٠ - ن٤٥}}{\text{د٣٠}} + ٣\,\frac{\text{مجـ ن٣١ - مجـ ن٤٥ - ١٤ن٤٥}}{\text{د٣٠}}$$

$$= ٢\,\frac{\text{ن٣٠ - ن٤٥}}{\text{د٣٠}} + ٣\,\frac{\text{ن٣٠ + (مجـ ن٣١ - مجـ ن٤٥ - ١٤ن٤٥) - ن٤٥}}{\text{د٣٠}}$$

$$= ٢\,\frac{\text{ن٣٠ - ن٤٥}}{\text{د٣٠}} + ٣\,\frac{\text{مجـ ن٣٠ - مجـ ن٤٥ - ١٥ن٤٥}}{\text{د٣٠}}$$

وهذه هى ذات القيمة الحالية بالطريقة الأولى .

*العقود ذات المبالغ المتزايدة التى تدفع فى حالة الوفاة فقط :

تنقسم هذه العقود إلى عقود التامين مدى الحياة المتزايدة وعقود التامين المؤقت المتزايدة .

هذا ونوجد الأقساط فى مثل هذه العقود من خلال القيمة الحالية لمبالغ التأمين المتزايدة وهذه نحصل عليها بذات التتابع المبين بعقود دفعات الحياة مع تعديل رموز البسط من ن إلى م ومن مجن إلى مجم **وفقا لما يلى :**

أولا : عقود التأمين مدى الحياة المتزايدة :

مثال ٥ : أوجد كل من القسط الوحيد الصافى والقسط السنوى المتساوى لمدى الحياة ولمدة ن من السنوات **لعقد تأمين لمدى الحياة لشخص فى تمام**

السن(س) وذلك بافتراض أن مبلغ التأمين يتزايد سنويا بمقدار ثابت فيكون١٠ جنيه فى حالة الوفاه خلال السنة الأولى ثم ٢٠ جنيه فى السنة الثانية ٠٠وهكذا كالآتى : ١٠٠ ٢٠٠ ٣٠٠ ٤٠٠ ٠٠٠

الحـــــل

١- القسط الوحيد الصافى (القيمة الحالية لمبالغ التأمين)

= ١ (١٠٠ج س+٢٠٠ج س+١+٣٠٠ج س + ٢ + ٠٠٠)
د س

= ١٠٠ (ج س + ٢ج س + ١ + ٣ج س + ٢ + ٠٠٠)
د س

=١٠٠ (مـ س + مـ س+١ + مـس+٢ + ٠٠٠) = ١٠٠ مجمـ س
د س د س

=١٠٠ مجمـ س / د س

٢ - القسط السنوى المتساوى لمدى الحياه = ١٠٠ مجمـ س / ن س

٣ -القسط السنوى المتساوى لمدة (ن) من السنوات = ١٠٠ مجمـ س / ن س- ن س + ن

ثانيا : عقود التأمين المؤقت المتزايدة:

مثال ٦ : أكتب القانون الذى يعطى القسط الوحيد الصافى والقسط السنوى المتساوى لمدة ٤ سنوات للعقد المبين بالمثال السابق وذلك إذا ما إفترضنا أنه محدود بمدة ٤ سنوات .

الحـــــل

١ - القسط الوحيد الصافى

= ١٠٠ / د س [ج س + ج س+١ + ج س+٢ + ج س+٣]
[+ ج س+١ + ج س+٢ + ج س+٣]
[+ ج س+٢ + ج س+٣]
[+ ج س+٣]

[مـ س - مـ س+٤]
١٠٠ [+مـ س+١ - مـ س+٤]
= ـــــ [+ مـ س+٢ - مـ س+٤]
د س [+ مـ س+٣ - مـ س+٤]

=$\frac{١٠٠}{د س}$[(م س + مـ س+١ + مـ س+٢ + مـ س+٣)-٤مـ س+٤]

مجمـ س- مجمـ س+٤ - ٤مـ س +٤
=١٠٠ ـــــــــــــــــــــــــــــ وذلك حيث س+٤= س+عدد سنوات مدة العقد
د س

٢ -القسط السنوى المتساوى المحدود بمدة العقد (٤ سنوات)

مجمـ س- مجمـ س+٤ - ٤م س +٤
=١٠٠ ـــــــــــــــــــــــــــــ
ن س - ن س +٤

المبحث الثانى
حساب أقساط العقود ذات المبالغ المتناقصة

قد تكون عقود دفعات الحياة متناقصة والأمر كذلك بالنسبة لعقود التأمين التى تدفع مبالغها فى حالة الوفاه ، ونتناول فيما يلى كيفية تحديد أقساط مثل هذه العقود .

*عقود دفعات الحياة لمدى الحياة المتناقصة :

مثال ٧ : تعاقد شخص فى تمام السن (س) مع شركة تأمين على أن تدفع له مبلغا سنويا يبدأ بمقدار ٣٠٠ جنيه فى السنة الأولى من التعاقد ثم ينقص سنويا بمقدار ١٠ جنيه حتى يصبح ٢٠٠ جنيها يظل بعدها ثابتا ويسدد طالما كان المتعاقد على قيد الحياة .

والمطلوب حساب القسط الوحيد الصافى بافتراض أن دفعة الحياة عادية ثم بافتراض أنها فورية .

الحـــــــــل

١ -القسط الوحيد الصافى بافتراض أن الدفعة عادية .

$$= \frac{300\ \text{د}_{\text{س}+1}}{\text{د}_{\text{س}}} + \frac{290\ \text{د}_{\text{س}+2}}{\text{د}_{\text{س}}} + \cdots + \frac{200\ \text{ن}_{\text{س}+11}}{\text{د}_{\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{\text{د}_{\text{س}}} \left[300(\text{د}_{\text{س}+1} + \text{د}_{\text{س}+2} + \cdots) - 10(\text{د}_{\text{س}+2} + 2\text{د}_{\text{س}+3} + \cdots + 9\text{د}_{\text{س}+10} + 10\text{ن}_{\text{س}+11}) \right]$$

$$= \frac{1}{\text{د}_{\text{س}}} \left[300\ \text{ن}_{\text{س}+1} - 10(\text{ن}_{\text{س}+2} + \text{ن}_{\text{س}+3} + \cdots + \text{ن}_{\text{س}+10} + \text{ن}_{\text{س}+11}) \right]$$

$$= \frac{1}{\text{د}_{\text{س}}} \left[300\ \text{ن}_{\text{س}+1} - 10(\text{مجن}_{\text{س}+2} - \text{مجن}_{\text{س}+12}) \right]$$

٢ - القسط الوحيد الصافى بافتراض أن الدفعة فورية

$$= \frac{\text{٣٠٠ ن س - ١٠ (مجن س + ١ – مجن س+١١)}}{\text{د س}}$$

*عقود التأمين الحياة المتناقصة :

من الأمثلة العملية لتلك العقود تلك التى تبرمها الجمعيات التعاونية لبناء المساكن على حياة أعضائها وذلك عندما تبيع لهم مساكن بالتقسيط على أقساط سنوية متساوية طالما كان العضو على قيد الحياه وتخشى بالتالى خطر الوفاه الذى تسقط معه الأقساط فتقوم باجراء التأمين ذو المبالغ المتناقصه إذ يكون المستحق لها عند التعاقد هو باقى ثمن البيع بأكمله ثم تتناقص هذه المديونية سنويا بمقدار القسط الذى يؤديه المشترى ، ونبين فيما يلى بمثال عملى كيفية حساب القيمة الحالية لهذه العقود وبالتإلى أقساطها .

مثال ٨ : قام شخص فى تمام السن (س) بأداء مقدم أحد المساكن التى تعاقد على شرائها من إحدى الجمعيات التعاونية للإسكان وتعهد بسداد باقى الثمن على أقساط بواقع ١٠٠٠ جنيه سنويا لمدة ٥ سنوات وذلك طالما ظل على قيد الحياة .

فإذا رغبت الجمعية المذكورة فى التعاقد مع إحدى شركات التأمين لتضمن لها الحصول على الأقساط التى لا يتم سدادها فى حالة وفاة المشترى ، فما هو القانون الذى يعطى القسط الوحيد الصافى والقسط السنوى المتساوى لمدة ٥ سنوات لهذا التعاقد .

الحـــــل

١ - تتناقص مبالغ التأمين فى هذا المثال على النحو التإلى :

٥٠٠٠ ٤٠٠٠ ٣٠٠٠ ٢٠٠٠ ١٠٠٠

وهكذا فأن القيمة الحالية للعقد (القسط الوحيد الصافى)

=١ (٥٠٠٠ج س+٤٠٠٠ج س+١+٣٠٠٠ج س+٢+٢٠٠٠ج س+٣+١٠٠٠ج س+٤)

د س

[ج س + ج س+١ + ج س+٢ + ج س+٣ + ج س+٤]
١٠٠٠ [+ج س + ج س+١ + ج س+٢ + ج س+٣]
= ــــــ [+ج س +ج س+١ + ج س+٢]
د س [+ج س + ج س+١]
[+ج س]

[مـ س - مـ س+٥]
١٠٠٠ [مـ س - مـ س+٤]
= ــــــ [مـ س - مـ س+٣]
د س [مـ س - مـ س+٢]
مـ س - مـ س+١]

=١٠٠٠ [٥ مـ س - (مجمـ س+١- مجمـ س+٦)]
د س

٥٠٠ مـ س - ١٠٠٠ (مجمـ س+١ - مجمـ س+٦)
= ــ
د س

أى انه إذا رمزنا لعدد سنوات عقد التأمين بالرمز (ن) فإن القاعدة العامة لتحديدالقسط الوحيدالصافى لعقود تأمين الحياة ذات المبالغ المتناقصه

المبلغ الأول(م س)-مقدارالتناقص (مجم س+١- مجم س+ن+١)
= ــ
د س

٢-القسط السنوى المتساوى الذى تدفعه لمدة ٥ سنوات طالما كان

٥٠٠٠ م س -١٠٠٠(مجم س+١ - مجم س+٦)
المشترى على قيد الحياة = ــــــــــــــــــــــــــــــــ
ن س - ن س+٥

المبحث الثالث

الأقساط السنوية المتغيرة

الأقساط السنوية - عادية كانت أو محدودة **- قد تكون متساوية لا تتغير طوال مدة السداد وقد تكون متغيرة تبدأ مخفضة ثم تتزايد** بعد مضى مدة معينة **أو تبدأ كبيرة ثم تتناقص** مع مضى الزمن .

ولحساب الأقساط السنوية المتغيرة نتبع ذات الطريقة التى اتبعناها فى حساب الأقساط السنوية المتساوية (الثابتة**) فنحسب أولا القسط الوحيد الصافى (**القيمة الحالية للعقد**) ثم نحسب القيمة الحالية للأقساط السنوية على إعتبار أنها دفعات حياة فورية متغيرة متبعين فى ذلك القوانين الخاصة بحساب دفعات الحياة المتزايدة والمتناقصة المبينة بالمبحثين السابقين** . ونوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية **:**

مثال ٩ : أوجد القانون الذى يعطى القسط السنوى لعقد تأمين مختلط بأقساط سنوية مقدار كل منها فى الخمس سنوات الأولى يعادل ٠,٧٥ من مقدار كل منها بعد ذلك .

الحـــــل

نفرض أن مبلغ التأمين جنيه واحد وأن عمر المتعاقد (س) وأن مدة التأمين (ن) وأن القسط الذى يدفع بعد الـ ٥ سنوات الأولى (ط) وبالتالى فإن القسط الذى يدفع خلال الخمس سنوات الأولى =٠,٧٥ ط .

وهكذا فإن القسط السنوى يتحدد من خلال مساواة القسط الوحيد الصافى بالقيمة الحالية للأقساط المتناقصة والتى تمثل دفعتين من دفعات الحياة الأولى فورية مبلغها ٠,٧٥ ط ومدتها ٥ سنوات والثانية فورية مؤجلة ٥ سنوات مبلغها ط ومدتها ن - ٥ من السنوات .

أى أن القسط السنوى المتغير يتحدد كما يلى :

أس: ن | = ٠,٧٥ ط ء..س : ٥ | + ط٥ |..ء س : ن-٥|

ن س - ن س+٥ ن س+٥ - ن س+ن

=٠,٧٥ ———————— + ط ————————

د س د س

٠,٧٥ ن س + ٠,٢٥ ن س+٥ - ن س+ن

=ط ————————————————

د س

مـ س - مـ س+ن + د س+ن

٠,٠ ط = ————————————————

٠,٧٥ ن س + ٠,٢٥ ن س+٥ - ن س+ن

مثال ١٠ : تعاقد شخص فى تمام السن (٤٠) مع إحدى شركات التأمين على عقد تأمين لمدى الحياة مبلغه ١٠٠٠ جنيه وذلك بقسط سنوى يتناقص بمقدار ٥% إبتداء من القسط السنوى السادس ثم تزيد نسبة النقصان بعد ذلك بواقع ١% عن كل سنة تالية.

والمطلـوب تحديد القسـط السنوى لهـذا العقد ثم مقارنته بالقسط السنوى المتساوى .

الحــــل

مـ ٤٠

القسط الوحيد لهذا العقد = ١٠٠٠ ————

د ٤٠

فإذا فرضنا أن القسط السنوى الصافى الأول = ط.

فان القيمة الحالية للأقساط السنوية المتغيرة

د٥ د٤٦

=ط..ء٤٠: ٥ | + ط (١ - ٠,٠٥) —— + ط (١ - ٠,٠٦) ——

د٤٠ د٤٠

د٤٧

+ط (١ - ٠,٠٧) —— + ٠٠٠٠٠

د٤٠

ط

—

ط..ء٤٠-٥| +ـــ[(د٤٥+د٤٦+..)-(٠,٠٥د٤٥+٠,٠٦د٤٦..+)]
د٤٠

ط
طء٤٠ - ـــــ (٠,٠٥ د ٤٥ + ٠,٠٦ د٤٦ + ٠٠)
د٤٠

ط   ٠,٥ ط ن٤٥
ط ..ء٤٠ - ـــــــــــــ - ٠,٠١ ـــــ (د٤٦ + ٢د٤٧ + ٣د٤٨ + ٠٠)
د٤٠   د٤٠

ط   ن٤٥
ط ..ء٤٠ - ٠,٠٥ط ـــــ ٠,٠١ ـــــ مجن٤٦
د٤٠   د٤٠

وحيث أن القسط الوحيد = القيمة الحالية للأقساط السنوية

٠,٠ ١٠٠ م٤٠ = ط ن٤٠ - ٠,٠٥ ط ن٤٥ - ٠,٠١ ط مجن٤٦

١٠٠٠ مـ٤٠
٠,٠ ط = ـــــــــــــــــــــــــــــــــــــ
ن٤٠- ٠,٠٥ ن ٤٥ - ٠,٠١ مجن ٤٦

وباستخدام جدول الرموز الحسابية الأمريكى

١١٥١٨٥٥٧٧٨
= ـــ = ٢٣,١ جنيه
٥٧٧١٩٣٤٧,٤ – ٠,٠٥ × ٤٤٤٥٥١٦٤,١ – ٠,٠١ ×٥٦٣٣٧٢١٤٨,٧

هذا أما القسط السنوى المتساوى فأنه

١٠٠٠ م٤٠   ١١٥١٨٥٥٧٧٨
= ــــــــــ = ـــــــــــــــ = ١٩,٩٦ جنيه
ن٤٠   ٥٧٧١٩٣٤٧,٤

الفصل السادس عشر

الإحتياطيات الصافية

مقدمـــــــة
حساب الإحتياطى بطريقة الماضى
(بالطريقة الرجعية)
حساب الإحتياطى بطريقة المستقبل

مقدمة:

رأينا فى الفصل الثالث عشر أن القسط الوحيد الصافى يؤدى للمؤمن بمجرد التعاقد ، كما رأينا فى الفصل الرابع عشر أن القسط السنوى يؤدى كدفعة فورية بحيث يتم أداء القسط الأول بمجرد التعاقد ثم يستمر السداد فى أول كل من السنوات التالية حتى أول السنة التى تتم فيها الوفاه أو إنتهاء مدة التقسيط أيهما أسبق ، كما رأينا بالنسبة للتقسيط أن الأقساط متساوية المقدار .

ومن هنا تنشأ الإحتياطيات التى يتعين أن يحتفظ بها المؤمنون ويستثمرونها لحساب حملة الوثائق ضمانا لوفاء هؤلاء المؤمنون بالتزاماتهم ، وتنص على ذلك قوانين الإشراف والرقابة على هيئات التأمين الخاص والتجارى، كما تنص على ذلك قوانين التأمين الإجتماعى. **ووبيان ذلك أن التزامات المؤمنين عبارة عن التزامات مستقبلة تتزايد بمرور الوقت مع تقدم العمر ، ففى عقد الوقفية البحته يؤدى القسط الوحيد الصافى بمجرد التعاقد ، كما تؤدى الأقساط السنوية كدفعة فورية لمدة العقد أو لمدة أقل ، فى حين يلتزم المؤمن بأداء مبلغ التأمين بانتهاء مدة الوقفية ، وفى عقود المعاش (دفعات الحياة) يؤدى القسط الوحيد الصافى بمجرد التعاقد وتؤدى الأقساط السنوية كدفعة فورية لمدة التأجيل أو لمدة أقل فى حين يأتى التزام المؤمن فى مرحلة لاحقة ، وفى عقود تأمينات الحياة يؤدى القسط الوحيد الصافى بمجرد التعاقد وتؤدى الأقساط السنوية كدفعة فورية لمدة العقد (**قد تكون لمدى الحياة إذا كان العقد لمدى الحياة**) أو لمدة أقل** فى حين أن التزام المؤمن ينشأ بتحقق خطر الوفاة .

ومن ناحية أخرى فان الأقساط السنوية التى يؤديها المتعاقدون عبارة عن أقساط متساوية المقدار فى حين أن التزامات المؤمنين المستقبلة التزامات متزايدة بتزايد إحتمالات الوفاة مع تقدم العمر أو باقتراب موعد حلول التزام المؤمنين ، أى **أن القسط الطبيعى اللازم لمواجهة الإلتزامات السنوية يكون أقل من القسط السنوى المتساوى الذى يؤدى فى السنوات الأولى من مدة العقد ،وعلى العكس من ذلك فان هذا القسط السنوى المتساوى يكون أقل من القسط الطبيعى اللازم لمواجهة الإلتزامات السنوية فى السنوات الأخيرة من مدة العقد .**

وهكذا يتعين على هيئات التأمين أن تحتفظ بالزيادة فى الأقساط المتساوية عن الأقساط الطبيعية فى السنوات الأولى للتعاقد لتواجه منها العجز فى الأقساط المتساوية عن الأقساط الطبيعية فى السنوات الأخيرة من مدة التعاقد .

هذا ومن أهم الطرق الشائعة لحساب الاحتياطيات ما يعرف بطريقة الماضى أو بالطريقة الرجعية بالمقابلة لما يعرف بطريقة المستقبل أو بالطريقة التطلعية ، وتهتم الأولى بتحديد الإحتياطى باعتباره الفرق بين الأقساط المحصلة فى الماضى والتعويضات السددة فى الماضى ، أما الثانية فتهتم بتحديد الإحتياطى باعتباره الفرق بين الأقساط المستقبلة والتعويضات أو التزامات المؤمنين المستقبلة ٠٠ ومن المفترض أن للطريقتين نتيجة واحدة كما يتبين لنا فى الفقرات التالية التى نهتم فيها بعقود التأمين التى تؤدى مبالغها فى حالة الوفاه وبالعقود المختلطة وعقود الوقفية البحته .

حساب الإحتياطى بطريقة الماضى (بالطريقة الرجعية) :

تهتم هذه الطريقة بالماضى أى بالمدة التى إنقضت منذ التعاقد وحتى أنتهاء السنة التى يتم فيها تقدير الإحتياطى، وهكذا فان الإحتياطى الحسابى (Policy Value) يمثل الفرق بين إجمالى الأقساط المحصلة وفوائدها وبين إجمالى مبالغ التأمين المنصرفة وذلك حتى نهاية السنة التى يتم فيها تقدير الإحتياطى .

ومن هنا فاذا ما إفترضنا أنه فى أول إحدى السنوات تم التعاقد على مجموعة من وثائق التأمين على الحياة حيث تؤدى مبالغ التأمين فى نهاية السنة التى تقع فيها الوفاة فى حين تؤدى الأقساط فى أول كل سنة ، ويفترض إستثمارها بمعدل فائدة معين ، فان الإحتياطى الحسابى يتم تحديده على النحو التالى :

١ -الإحتياطى فى نهاية السنة الأولى :

××××	الأقساط المستحقة عند التعاقد .
××	+ الفوائد المفترض تحقيقها للأقساط
×××	ـــــ
××	- مبالغ التأمين المستحقة فى نهاية السنة
×××ـــــ	الإحتياطى فى نهاية السنة الاولى

٢ -الإحتياطى فى نهاية السنة الثانية :

×××× الإحتياطى المرحل من السنة الأولى
××× + الأقساط المستحقة عن الأحياء فى أول السنة

××× إجمالى الإحتياطى المرحل والأقساط المستحقه
×× + الفوائد المفترض تحقيقها للإحتياطى المرحل والأقساط

×××
×× - مبالغ التأمين المستحقة فى آخر السنة
×× الإحتياطى فى نهاية السنة الثالية

٣ -الإحتياطى فى نهاية ت من السنوات .

×××× الإحتياطى المرحل من السنة (ت – ١)
×× + الأقساط المستحقة عن الأحياء فى أول السنة

××× إجمالى الإحتياطى المرحل والأقساط المستحقة
×× + الفوائد المفترضة للإحتياطى المرحل والأقساط المستحقة

×××
×× - مبالغ التأمين المستحقة فى آخر السنة ت
الإحتياطى فى نهاية السنة (ت)

وبالطبع فإنه يمكن تحديد الإحتياطى الخاص بأية وثيقة من مجموعة الوثائق السارية في نهاية (ت) من السنوات ، وذلك بقسمة الإحتياطى الحسابى لمجموعة الوثائق فى نهاية هذه السنة على عدد الأحياء من جملة هذه الوثائق .

وعلى ضوء ذلك فاذا تعاقد شخص فى تمام السن س على وثيقة تأمين حياة مبلغها جنيه واحد وكنا فى سبيل تقدير إحتياطى هذه الوثيقة بعد مضى عدد من السنوات وليكن ت فانه يمكنإاستخلاص المعادلة الرياضية الخاصة بتقدير هذا الإحتياطى بافتراض الآتى :

١ -أن لدينا مجموعة من الأحياء فى تمام السن س (ل س) قاموا بالتعاقد على الوثيقة .

٢ -أن الأقساط السنوية يتم استحقاقها وتحصيلها فى أول كل سنة وتستثمر بمعدل فائدة معين (ع) .

٣ -أن مبالغ التأمين تستحق وتسدد فى آخر السنة التى تقع فيها الوفاة.

٤ -أن عدد الأحياء من حملة الوثيقة فى نهاية السنة التى يتم عندها تقدير الاحتياطى هو (ل س + ت).

ووفقا لذلك فان الإحتياطى الحسابى للوثيقة فى نهاية (ت) من السنوات= ط

[ل س(١ +ع) ت +ل س+١(١ +ع) ت-١ +٠٠٠+ ل س+ت-١(١ +ع)]

-[وس(١+ع) ت-١ + و س+١(١ +ع) ت-٢+ ٠٠٠ وس+ت-١] ÷ ل س + ت

وبوضع ح = (١ + ع)-١

=ط [ل س ح-ت +ل س+١ح-(ت-١) +٠٠+ ل س+ت-١ح-١]-[وس ح -(ت-١) +و س+١ ح-(ت-٢) +٠٠٠+ و س+ت-١] ÷ ل س + ت

وبالضرب فى ح س+ت

= [ل س ح س+ل س+١ح س+١+٠٠٠+ل س+ت-١ح س+ت-١]

- [وس ح س+١+و س+١ح س+٢+٠٠+وس+ت-١ح س+ت]÷ل س+ ت ح س+ ت

=ط[دس+دس+١+٠٠+دس+ت-١]-[ج س+ج س+١+٠٠+ج س+ت-١]÷د س+ت

ط (ن س - ن س +ت) - (مـ س- مـ س +ت)

= ―――――――――――――――――――

دس+ت

وبالطبع فاننا نفترض هنا إن مدة التقسيط لم تكن أقل من (ت) من السنوات أما إذا إفترضنا إن مدة التقسيط (ولتكن ن من السنوات) كانت أقل من ت أى أن آخر قسط تم سداده فى أول السنة السابقة على السنة التى يتم فى نهايتها تقدير الإحتياطى فان هذا الإحتياطى .

ط (ن س – ن س+ن) - (م س- م س+ت)

= ――――――――――――― باعتبار ن < ت

دس+ت

مثال ١١ : تعاقد شخص فى تمام السن ٣٠ على وثيقة تأمين لمدى الحياة مبلغها ١٠٠٠ جنيه مقابل قسط سنوى متساوى لمدى الحياه قدره ١٣,٤٦٨ جنيه . فما هو الاحتياطى الحسابى لهذه الوثيقة فى نهاية السنة العاشرة على التعاقد .

الحـــــــل

حيث أن التقسيط لمدى الحياة فان مدة التقسيط أكبر من عدد السنوات التى سيتم فى نهايتها تقدير الإحتياطى، وعلى ذلك فان الإحتياطى فى نهاية السنة العاشرة على التعاقد

=ط (ن٣٠ - ن٤٠) - ١٠٠٠ (مـ٣٠- مـ٤٠)

د٤٠

=١٣,٤٦٨(٩١٦٩٨٤٦١,٨-٥٧٧١٩٣٤٧,٤)-١٠٠٠(١٢٣٤٩٥٢,٩٩-١١٥١٨٥٥,٧٧٨)

٢٨٣٣٠٠١,٨

=١٣,٤٦٨ (٣٣٩٧٩١١٤,٤) ـ ١٠٠٠ (٨٣٠٩٧,٢١٢)

٢٨٣٣٠٠١,٨

= ٤٥٧٦٣٠٧١٢,٧ ـ ٨٣٠٩٧٢١٢ = ٣٧٤٥٣٣٠٠,٧ = ١٣٢,٢ جنيه

٢٨٣٣٠٠١,٨ ٢٨٣٣٠٠١,٨

مثال ١٢ : تعاقد شخص فى تمام السن ٣٠ على وثيقة تأمين لمدى الحياة مبلغها ١٠٠٠ جنيه مقابل قسط سنوى متساوى قدره ٢١,١٤٥ جنيه لمدة ٢٠ عاما (مثال٧).

فما هو الإحتياطى الحسابى لهذه الوثيقة فى نهاية السنة الرابعة والعشرين على التعاقد .

الحـــــــــل

حيث أن التقسيط لمدة ٢٠ عامـا فـان مدة التقسيط أقل من عدد السنوات التى سيتم فى نهايتها تقدير الاحتياطى (٢٤ سنة) ، وعلى ذلك فان الإحتياطى فى نهاية السنة الرابعة والعشرين على التعاقد

ط ن(ن٣٠ - ن٥٠) - ١٠٠٠ (مـ٣٠- مـ٥٤)

=

د٥٤

= ٢١,١٤٥(٩١٦٩٨٣٦١,٨-٣٣٢٩٤٩٥٠,٩)-١٠٠٠(١٢٣٤٩٥٢,٩٩-٩٥٩١٠٦,٣٧٦)

١٧٠٨٨٣٣,٩

= ٢١,١٤٥(٥٨٤٠٣٥١٠,٩) ـ ١٠٠٠ (٢٧٥٨٤٦,٦١٤)

١٧٠٨٨٣٣,٩

= ١٢٣٤٩٤٢٢٣٧ ـ ٢٧٥٨٤٦٦١٤ = ٩٥٩٠٥٩٦٢٣ = ٥٦١,٢٥ جنيه

١٧٠٨٨٣٣,٩ ١٧٠٨٨٣٣,٩

حساب الإحتياطى بطريقة المستقبل (بالطريق التطلعية) :

تهتم هذه الطريقة بالإلتزامات المستقبلة لكل من المؤمن لهم وهيئة التأمين، وهكذا فان الإحتياطى الحسابى لمجموعة وثائق حياة أو تأمين مختلط لمن هم فى تمـام السنِ س ، يمثـل عنـد تمـام السـن س+ت الفرق

بين القيمة الحالية لإلتزامات هيئة التأمين المستقبلة والقيمة الحالية للأقساط المستحقة فى المستقبل .

وعلى ضوء ذلك فإذا تعاقد شخص فى تمام السن (س) على وثيقه تأمين لمدى الحياة مبلغها جنيه واحد وكنا فى سبيل تقدير إحتياطى هذه الوثيقة عند تمام السن (س + ت) أى فى نهاية (ت) من السنوات، فانه يمكن إستخلاص المعادله الرياضية الخاصة بتقدير الإحتياطى الحسابى على النحو الآتى :

الإحتياطى الحسابى

=(القيمة الحالية لإلتزامات هيئة التأمين عند السن س+ت)

- القيمة الحالية للأقساط المستحقة عند السن س+ت

=(القسط الوحيد الصافى للعقد عند السن س +ت)

- القيمة الحالية لدفعة حياة فورية لمدة الأقساط المستحقة لشخص فى تمام السن س+ت

م س+ ت - ط (ن س+ت)

= ———————— وذلك إذا كانت الأقساط لمدى الحياة

دس +ت

مـ س+ ت-ط(ن س+ت-ن س+ت+ن)

أو= ———————— وذلك إذا كانت الأقساط لمدة(ن)من السنوات

دس+ت

مثال ١٣ : أوجد الإحتياطى المطلوب فى المثال ١١ باستخدام الطريقة التطلعية .

الحل

الإحتياطى المطلوب = ١٠٠٠ (مـ٤٠) - ط (ن٤٠)

————————

د٤٠

= (١٠٠٠×١١٥١٨٥٥,٧٧٨) – (١٣,٤٦٨ × ٥٧٧١٩٣٤٧,٤)

٢٨٣٣٠٠١,٨

= ١١٥١٨٥٥,٧٧٨ – ٧٧٧٣٦٤١٧٠,٧٨ = ٣٧٤٤٩١٦٠٧,٢٢ = ١٣٢,١٩ جنيه

٢٨٣٣٠٠١,٨ ٢٨٣٣٠٠١,٨

مثال ١٤ : أوجد الاحتياطى المطلوب فى المثال رقم ١٢ باستخدام الطريقة التطلعية .

الحـــــــل

لا توجد فى هذه الحالة أقساط مستحقة فى تاريخ تقدير الإحتياطى إذ أن مدة التقسيط٢٠ عاما، فى حين يتم تقدير الاحتياطى بعد ٢٤ عاما .

وهكذا فان الاحتياطى المطلوب يتحدد بالقيمة الحالية لإلتزام الشركة عند السن (س + ت) أى = ١٠٠٠ م٥٤ ÷ د ٥٤

= ١٠٠٠×٩٥٩١٠٦,٣٧٦= ١٠٠٠×٠,٥٦١٢٦٠ = ٥٦١,٢٦ جنيه

١٧٠٨٨٤٤,٩

*الإحتياطى الحسابى لعقود تأمينات الحياة وعقود الوقفية البحتة والعقود المختلطة والإثبات الجبرى لتساوى طريقة الماضى وطريقة المستقبل :

أولا : بالنسبة لعقد التأمين لمدى الحياه:

١ - فى حالة السداد على أقساط لمدى الحياه:

وفقا لطريقة المستقبل فإن الإحتياطى يمثل الفرق بين الإلتزامات المستقبلية (عند حساب السن س+ت) والأقساط المستقبلة (إعتبارا من السن س + ت) فإذا كانت الأقساط لمدى الحياة فإنه

مـ س+ت - ط ن س+ ت

= الإحتياطى بطريقة الماضى

د س+ت

ويمكن إثبات ذلك جبريا كما يلى :

الإحتياطى بطريقة الماضى

ط(ن س-ن س+ت)- (مـ س- مـ س+ت) ط ن س- ط ن س+ت- مـ س+مـ س+ت

= =

د س+ت د س+ت

وبإعتبار ط = مـ س/ ن س

(مـ س÷ن س)× ن س - ط ن س+ت - مـ س + مـ س+ت

=

د س+ت

مـ س - ط ن س+ت - مـ س + مـ س+ت   مـ س+ت - ط ن س+ت
= ـــ = ـــــــــــــــــــــــــــــــ
د س+ت   د س+ت

= الإحتياطى بطريقة المستقبل

٢ - فى حالـة التقسيط لعدد محدود من السنوات (ن) أكبر من عدد السنوات التى يتم حساب الإحتياطى فى نهايتها (ت) أى (ن> ت):

وفقا لطريقـة المستقبـل فـإن الإحتياطى يمثل الفرق بين الإلتزامات المستقبلية (عند السن س+ت) والأقساط المستقبله (إعتبارا من السن س+ت) فإذا كانت الأقساط لمدة أكبر من عدد السنوات التى يتم حساب الإحتياطى فى نهايتها فإن الإحتياطى.

مـ س+ت- ط ن (ن س+ت+ م س+ن)
= ـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــ = الإحتياطى بطريقة الماضى
د س+ت

ويمكن إثبات ذلك جبريا كما يلى:

الإحتياطى بطريقة الماضى

ط ن (ن س – ن س+ت) - (مـ س - مـ س+ت)
= ـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــ وبوضع - ، + ن س+ن.
د س+ت

ط ن (ن س- ن س+ت+ن س+ن-ن س+ن)-(مـ س - مـ س+ت)
= ـــ
د س+ت

ط ن (ن س-ن س+ن)-ط ن(ن س+ت-ن س+ن)-(م س- م س+ت)
= ـــ
د س+ت

وحيث ط ن=م س÷ ن س - ن س+ن

مـ س÷ ن س - ن س+ن (ن س-ن س+ن)-ط ن(ن س+ت-ن س+ن)- م س+ مـ س+ت
= ـــ
د س+ت

= [مـ س - ط ن(ن س+ت- ن س+ن) - مـ س + مـ س+ت] ÷ د س+ت

$$\text{الإحتياطى بطريقة المستقبل} = \frac{\text{م}_{\text{س+ت}} - \text{ط ن}\,(\text{ن}_{\text{س+ت}} - \text{ن}_{\text{س+ن}})}{\text{د}_{\text{س+ت}}}$$

٣ -فى حالة التقسيط لعدد من لسنوات (و) أقل من عدد السنوات التى يتم حساب الإحتياطى فى نهايتها (ت) أى (و < ت)

وفقا لطريقة المستقبل فإن الاحتياطى يمثل الفرق بين الإلتزامات المستقبلة (إعتبارا من السن س+ت) فإذا كانت مدة التقسيط أقل من عدد السنوات التى يتم حساب الإحتياطى فى نهايتها فإنه لا توجد أقساط مستقبلة ولذا فإن الإحتياطى .

= م س+ت / د س+ت = الإحتياطى بطريقة الماضى

ويمكن إثبات ذلك جبريا كما يلى :

الإحتياطى بطريقة الماضى

= ط (ن س- ن س+و) - (مـ س- مـ س+ت) / د س+ت وحيث ط و = مـ س / ن س – ن س+و

= مـ س ÷ ن س - ن س+و(ن س - ن س+و) - (م س – م س+ت) / د س+ت

= مـ س - مـ س + مـ س - ت / د س+ت = مـ س+ت / د س+ت

=الإحتياطى بطريقة المستقبل (أى أس + ت)

٤ -فى حالة السداد بقسط وحيد :

لا توجد هنا اقساط مستقبله ولذا فإن الاحتياطى بطريقة المستقبل .

= مـ س+ت / د س+ت = الإحتياطى بطريقة الماضى

ويمكن إثبات ذلك جبريا كما يلى:

الإحتياطى بطريقة الماضى

= أ س × دس - (مـ س - مـ س+ت) / دس+ت وحيث أن أس= مـ س/ دس

$$= \frac{(\text{مـ س}/\text{ د س})\times \text{ د س} - (\text{مـ س} - \text{مـ س+ت})}{\text{دس+ت}} = \frac{\text{مـ س} - (\text{مـ س+مـ س+ت})}{\text{دس+ت}}$$

$$= \frac{\text{مـ س+ت}}{\text{د س+ت}}$$ = الإحتياطى بطريقة المستقبل (أى أس+ت)

ثانيا : بالنسبة لعقد التأمين المؤقت :

١ -فى حالـة التقسيط لمـدة العقد (أو لمـدة اكـبر مـن المـدة التـى يحسب الإحتياطى فى نهايتها) :

الإحتياطى بطريقة الماضى

$$= \frac{\text{ط ن (ن س- ن س+ت) - (م س- م س+ت)}}{\text{دس+ت}}$$

وبوضع - ،+ ن س+ن

$$= \frac{\text{ط ن(ن س- ن س+ن + ن س+ن - ن س+ت)- (مـ س- مـ س+ت)}}{\text{دس+ت}}$$

$$= \frac{\text{ط ن(ن س- ن س+ن)- ط ن(ن س+ ت- ن س+ن)- (مـ س- مـ س+ت)}}{\text{دس+ت}}$$

وحيث ط ن = (مـ س- مـ س+ن) ÷ (ن س- ن س+ن)

$$= \frac{\text{(مـ س-مـ س+ن)÷ (ن س-ن س+ن) (ن س-ن س+ن)-ط ن(ن س+ ت-ن س+ن)-(مـ س-مـ س+ت)}}{\text{دس+ت}}$$

=[مـ س- مـ س+ن- ط ن (ن س+ ت - ن س+ن)- مـ س+ مـ س+ت]÷دس+ت

=[مـ س+ت- مـ س+ن- ط ن (ن س+ ت - ن س+ن)] ÷ د س+ت

=الإحتياطى بطريقة المستقبل

٢ -فى حالة التقسيط لعدد من السنوات أقل من العدد الذى يحسب الإحتياطى فى نهايته (و < ت) :

الإحتياطى بطريقة الماضى

ط و(ن س- ن س+و) - (مـ س- مـ س+ت)

= ―――――――――――――――

دس+ت

وحيث ط و=(مـ س- مـ س+ن)÷(ن س- ن س+و)

[(مـ س- مـ س+ن) ÷(ن س- ن س+و)](ن س- ن س+و) - (مـ س- مـ س+ت)

= ―――――――――――――――――――――

دس+ت

مـ س- مـ س+ن - مـ س+ م س+ت مـ س+ت - مـ س+ن

= ――――――――――― = ――――――――――

دس+ت دس+ت

=الإحتياطى بطريقة المستقبل

٣ -فى حالة السداد بقسط وحيد:

(أ س١: ن|) × د س-(مـ س- مـ س+ت)

الإحتياطى بطريقة الماضى = ―――――――――――――

د س+ت

وحيث أ س١ : ن| = مـ س- مـ س+ت ÷ د س

[مـ س- مـ س+ن ÷ د س] د س -(مـ س- مـ س+ت)

= ―――――――――――――――――――

دس+ت

مـ س- مـ س+ن - مـ س- مـ س+ت مـ س+ت - مـ س+ن

= ――――――――――― = ――――――――――

د س+ت د س+ت

=الإحتياطى بطريقة المستقبل

ثالثا : بالنسبة لعقد الوقفية البحتة :

١ - فى حـالة التقسيـط لمـدة العقـد (أو لمـدة أكبر من المدة التى يحسب الإحتياطى فى نهايتها) :

الإحتياطى بطريقة الماضى

ط ن (ن س – ن س+ت)

= ――――――――― وبوضع - ، + (ن س+ن)

د س+ت

ط ن (ن س - ن س+ن + ن س+ن- ن س+ت)

= ―――――――――――――――

د س+ت

ط ن (ن س- ن س+ن) – ط ن(ن س+ت- ن س+ن)
= ———————————————
د س+ت

وحيث ط ن= د س+ن / ن س – ن س+ن

[د س+ن ÷ ن س - ن س+ن](ن س – ن س+ن) - ط ن (ن س+ت- ن س+ن)
= ———————————————
د س+ت

د س+ن – ط ن (ن س+ت – ن س+ن)
= ——————————— = الإحتياطى بطريقة المستقبل
د س+ت

٢ - فى حالــة التقسيــط لعـدد من السنـوات (و) أقل من العدد الذى يحسب الإحتياطى فى نهايته (ت) أى (و < ت):

الإحتياطى بطريقة الماضى :

ط و (ن س – ن س+و)
= ——————— وحيث ط و = د س+ن ÷ ن س-ن س+و
د س+ ت

[د س+ن ÷ ن س – ن س+و]-(ن س - ن س +و)
= ——————————— = د س+ن / د س+ت
د س+ت

=الإحتياطى بطريقة المستقبل

٣ - فى حالة السداد بقسط وحيد :

الإحتياطى بطريقة الماضى:

أ س : $\overline{ن|}$ ١ × دس
= ————— وحيث أ س : $\overline{ن|}$ ١= د س+ن / دس
دس+ت

(د س+ن ÷ د س)× د س
= ————— = د س+ن / د س+ت = الإحتياطى بطريقة المستقبل
د س+ت

رابعا : بالنسبة للعقد المختلط :

١ - فى حالــة التقسيط لمـدة العقـد (أو لمـدة أكـبر من المـدة الــتى يحسب الإحتياطى فى نهايتها **):**

الإحتياطى بطريقة الماضى

ط ن (ن س- ن س+ت) - (مـ س- مـ س+ت)

= ـــــــــــــــــــــــــــــ وبوضع -، +ن س+ن

د س+ت

ط ن(ن س-ن س+ن +ن س+ن-ن س+ت)- (مـ س- مـ س+ت)

= ـــــــــــــــــــــــــــــ

دس+ت

ط ن(ن س-ن س+ن)-ط ن(ن س+ ت-ن س+ن)-(مـ س-مـ س+ت)

= ـــــــــــــــــــــــــــــ

دس+ت   مـ س- مـ س+ن + د

س+ن

وحيث ط ن = ـــــــــــــــــــــــ

ن س- ن س+ ن

[(م س- م س+ن+د س+ن) ÷ (ن س- ن س+ن)] (ن س-ن س+ن)-ط ن(ن س+ ت-ن س+ن)-(م س-م س+ت)

= ـــــــــــــــــــــــــــــ

دس+ت

=[مـ س-مـ س+ن+د س+ن- ط ن(ن س+ت-ن س+ن)-مـ س+مـ س+ت] ÷ دس+ت

= [مـ س+ت- مـ س+ن + د س+ن - ط ن (ن س+ ت – ن س+ن)] ÷ د

س+ت

=الإحتياطى بطريقة المستقبل

٢ - فى حالــة التقسيــط لعدد مـن السـنوات أقـل مـن العـدد الـذى يحسب الإحتياطى فى نهايته (و < ت):

الإحتياطى بطريقة الماضى

ط و (ن س- ن س+و) - (مـ س- مـ س+ت)

= ـــــــــــــــــــــــــــــ

د س+ت   مـ س- مـ س+ن + د س+ن

وحيث ط و = ـــــــــــــــــــــــ

ن س- ن س+ و

[(مـ س-مـ س+ن+د س+ن)÷ (ن س- ن س+و)] × (ن س- ن س+و)-مـ س+مـ س+ت

= ـــــــــــــــــــــــــــــ

دس+ت

م‍ـ س- م‍ـ س+ن + د س+ن - م‍ـ س+ م‍ـ س+ت   م‍ـ س+ت- م‍ـ س+ن +

دس+ن

= ــــــــــــــــــــــــــــــــ = ــــــــــــــــــــ

دس+ت   دس+ت

=الإحتياطى بطريقة المستقبل

٣ - فى السداد بقسط وحيد:

الإحتياطى بطريقة الماضى

أ س : ن| × دس - (م‍ـ س- م‍ـس+ت)

= ــــــــــــــــــــــــــــــــ

دس+ت   م‍ـ س- م‍ـ س+ن + دس+ن

وحيث أ س: ن | = ــــــــــــــــ

دس

= [(م‍ـ س- م‍ـ س+ن + د س+ن) ÷ دس]× دس - (م س- م س+ت)

ــــــــــــــــــــــــــــــــــــ

دس+ت

م‍ـ س- م‍ـ س+ن + د س+ن - م‍ـ س+ م‍ـ س+ت   م‍ـ س+ت - م‍ـ س+ن + د

س+ن

= ــــــــــــــــــــــــ =

دس+ت   دس+ت

مثال ١٥ : تعاقد شخص فى تمام السن ٤٠ على وثيقة تأمين مختلط عادى مبلغها ١٠٠٠ جنيه ومدتها ٢٠ عاما (أى أن مبلغ التأمين يؤدى فى حالة الحياة حتى تمام السن ٦٠ أو فى حالة الوفاة قبل بلوغ هذا السن) ، فما هو القسط السنوى المتساوى المستحق ، وما هو الإحتياطى الحسابى فى نهاية السنة الخامسة عشر فى الحالتين الآتيتين (محسوبا بكل من طريقة المستقبل) :

١ -التقسيط لمدة ٢٠ عاما.   ٢ -التقسيط لمدة ١٠ سنوات فقط .

الحـــــل

أولا: بالنسبة للقسط السنوى :

١ -القسط السنوى فى حالة التقسيط لمدة ٢٠ عاما (ط ن)

$$= ١٠٠٠ \times \frac{س- مـ س+ن + د س+ن}{ن س- ن س+ ن} = ١٠٠٠ \times \frac{(مـ٤٠- مـ٦٠)+ د٦٠}{ن ٤٠- ن ٦٠}$$

$$= \frac{١٠٠٠\times(٨٢٥٨٣٧,٧٢٢-١١٥١٨٥٥,٧٧٨)+١٣٠٦٧٢٣,٨}{١٦٥١٠٠٧٨,٨ - ٥٧٧١٩٣٤٧,٤}$$

$$= \frac{١٠٠٠\times٣٢٦٠٠٨,٠٥٦ + ١٣٠٦٧٢٣,٨}{٤١٢٠٩٢٦٨,٦} = ١٠٠٠\times \frac{١٦٣٢٧٣١,٨٥٦}{٤١٢٠٩٢٦٨,٦}$$

= ١٠٠٠ × ٠,٠٣٩٦٢٠٥ = ٣٩,٦٢ جنيه

٢ -القسط السنوى فى حالة التقسيط لمدة ١٠ سنوات (ط و)

$$= ١٠٠٠ \times \frac{م س- م س+ن + د س+ن}{ن س- ن س+ و} = ١٠٠٠ \times \frac{(م٤٠- م ٦٠)+ د٦٠}{ن٤٠- ن٥٠}$$

$$= ١٠٠٠\times \frac{١٦٣٢٧٣١,٨٥٦}{٥٧٧١٩٣٤٧,٤ - ٣٣٢٩٤٩٥٠,٩} = ١٠٠٠\times \frac{١٦٣٢٧٣١,٨٥٦}{٢٤٤٢٤٣٩٦,٥}$$

= ١٠٠٠ × ٠,٠٦٦٨٤٨٤ = ٦٦,٨٥ جنيه

ثانيا : الإحتياطى الحسابى فى نهاية السنة الخامسة عشر :
يمكن حساب الاحتياطى بالطريقة الرجعية أو بالطريقة التطلعية ،

وفيما يلى نقوم بحسابه الطريقة الرجعية :
١ -الإحتياطى الحسابى فى نهاية السنة ١٥ فى حالة التقسيط لمدة ٢٠ عاما حيث ن (مدة التقسيط) **أكبر من ت** (المدة التى يحسب الإحتياطى فى نهايتها):

$$= \frac{ط ن (ن س- ن س+ت) - ١٠٠٠(م س- م س+ت)}{د س+ت}$$

$$= \frac{ط ن (ن ٤٠- ن ٥٥) - ١٠٠٠(م٤٠- م٥٥)}{د٥٥}$$

$$= \frac{٣٩,٦٢٠٥(٥٧٧١٩٣٤٧,٤-٢٤٠٣٢٧٧,٤)-١٠٠٠(١١٥١٨٥٥,٧٧٨-٩٣٩٣٦٣,٣٤٨)}{}$$

١٦٣٩٣٢٩،٧

=(٣٣٦٨٧١٧٠×٣٩،٦٢٠٥) – (٢١٢٤٩٢،٤٣ × ١٠٠٠)
/ ١٦٣٩٣٢٩

= ١٣٣٤٧٠٢٥١٩ – ٢١٢٤٩٢٤٣٠ / ١٦٣٩٣٢٩ = ١١٢٢٢١٠،٠٨٩ / ١٦٣٩٣٢٩ = ٦٨٤،٥٥ جنيه

٢ – الإحتياطـى الحسـابى فـى نهـاية السنـة ١٥ فـى حالة التقسيط لمـدة ١٠سنـوات حيـث و (مـدة التقسيط**) أقـل من ت (**المـدة التـى يحسب الإحتياطى فى نهايتها**) :**

ط و (ن س- ن س+ن) - ١٠٠٠(م س- م س+ت)
= ــــــــــــــــــــــــــــــ
د س+ت

ط و (ن ٤٠- ن ٥٠) - ١٠٠٠(م٤٠- م٥٥)
= ــــــــــــــــــــــــــــــ
د٥٥

= ٦٦،٨٤٨٤(٥٧٧١٩٣٤٧،٤ – ٣٣٢٩٤٩٥٠،٩) – ٢١٢٤٩٢٤٣٠
/ ١٦٣٩٣٢٩

= (٦٦،٨٤٨٤ × ٢٤٤٢٤٣٩٦) – ٢١٢٤٩٢٤٣٠
/ ١٦٣٩٣٢٩

= ١٦٣٢٧٣١٨٢٧ – ٢١٢٤٩٢٤٣٠ / ١٦٣٩٣٢٩ = ١٤٢٠٢٣٩٣٩٧ / ١٦٣٩٣٢٩ = ٨٦٦،٣٥ جنيه

هذا وبحساب الإحتياطى المطلوب بالطريقة التطلعية فستحصل على ذات النتيجة وفقا لما يلى:

١ - الإحتياطى فى حالة التقسيط لمدة ٢٠ عاما:

= [١٠٠٠(م س+ت-م س+ن+د س+ن)- ط ن(ن س+ت – ن س+ن)] ÷ د س+ت

= [١٠٠٠ (م٥٥ - م٦٠ + د٦٠) - ط ن(ن٥٥ - ن٦٠)] ÷ د٥٥

= ١٠٠٠(٩٣٩٣٦٣،٤٣٨-٨٢٥٨٤٧،٧٢٢

٢ - الإحتياطى فى حالة التقسيط لمدة ١٠ سنوات:

لا توجد فى هذه الحالة أقساط مستحقة فى تاريخ حساب الإحتياطى حيث يفترض سداد كافة الأقساط ، وعلى ذلك فإن الإحتياطى يمثل القيمة الحالية لإلتزامات شركة التأمين عند السن (س + ت) أى:

١٠٠٠ (م س+ت – م س+ن + د س+ن) ١٠٠٠ (م٥٥ - م٦٠ + د٦٠)

$$= \frac{\qquad}{\text{د س+ت}} = \frac{\qquad}{\text{د٥٥}}$$

$$= \frac{١٤٢٠٢٣٩٤٢٦}{١٦٣٩٣٢٩,٧} = ٨٦٦,٣٥ \text{ جنيه}$$

تمـاريـن

١ -إحسـب القسـط السنـوى الصـافى المتسـاوى الذى يؤدى لمدة ٢٠عامـا لوثيقـة تأميـن مؤقـتة مبلغهـا ١٠٠٠جنيـه ومـدتهـا ٣٠ سنة لشخص فى تمام السن٢٥ .
وأوجد باستخدام الطريقة الرجعية اُحتياطى الحسابى الصافى لهذه الوثيقة فى نهاية السنة العاشرة .

٢ -إحسـب القسط السنـوى الصـافى المتسـاوى الـذى يؤدى لمدى الحياة لوثيقة تأمين لمدى الحياة مبلغها ١٠٠٠٠ جنيه .
وأوجد باستخدام الطريقة التطلعية الإحتياطى الحسابى الصافى لهذه الوثيقة فى نهاية السنة الخامسة والعشرين .

٣ -تعـاقد شخـص فـى تمـام السـن ٣٠ علـى وثيقـة تـأمين مختلط عـادى مبلغهـا ١٠٠٠ جنيـه ومدتهـا ٢٠ عامـا فمـا هو القسـط السنوى الصـافى المتسـاوى الـذى يـؤدى لمـدة الوثيقـة ٠٠ ومـا هو الإحتياطى الحسابى الصافى فى نهاية السنة الخامسة .

٤ - تعاقد شخص فى تمام السن٤٠ على وثيقة تأمين مختلط مدتها ٢٠ عاما مبلغها ٥٠٠٠ جنيه. فما هو القسط السنوى الصافى المتساوى الذى يؤدى لمدة ١٠ سنوات ٠٠ وما هو الإحتياطى الحسابى الصافى للوثيقة فى نهاية السنة الخامسة عشرة بإستخدام الطريقة التطلعية.

٥ - أوجـد الإحتيـاطى الحسـابى فى نهـاية السنـة العـاشرة لـوثيقة تأمين لمدى الحياة لشخص فى السن ٣٥ مبلغهـا ١٠٠٠ جنيـه، وذلك فى الحالتين الآتيتين :

١ -التقسيط لمدى الحياة .　　　　٢ -التقسيط لمدة ٢٠ عاما .

٦ -إذا كـان التقسيط فى التمـرين السـابق لمـدة ٢٠ عـاما ، فأوجد الإحتياطى الحسابى فى نهاية السنة الخامسة والعشرين .

٧ - أصـدرت وثيقـة تأمـين مـؤقت لمـدة ٥ سنوات مبلغها ١٠٠٠ جنيه وذلك لشخص فى تمام العمر ٣٠ سنة ، والمطلوب :

(أ) حســاب القسـط السـنوى المتسـاوى الـذى يدفع خلال مـدة التعاقد (خمس سنوات) .
(ب) حساب الإحتياطى الحسابى فى نهاية السنة الثالثة .
(ج) بيان سبب تكوين الاحتياطى الحسابى الصافى فى وثيقة التأمين المؤقت .

٨ - أوجد الإحتياطى الحسابى الصافى فى نهاية السنة الأولى لوثيقة تأمين مؤقت مدتها ٣ سنوات ومبلغها ١٠٠٠ جنيه لشخص فى تمام العمر ٦٠ سنة مع مراعاة أن المؤمن عليه يتعهد بسداد إلتزمه الصافى على ٣ أقساط سنوية متساوية صافية تدفع أول كل سنة .

٩ - بإستخدام الرموز الجبرية فقط وضح معادلة حساب الإحتياطى الصافى فى نهاية السنة العاشرة بكل من الطريقة الرجعية والطريقة التطلعية بالنسبة للوثائق الآتية :
١ - وثيقة تأميـن لمـدى الحيـاة مبلغهـا ١٠٠٠ جنيه لشخص فى تمام السن ٣٠ ، والأقساط لمدى الحياة .
٢ - وثيقة تأمـين مؤقت مبلغهـا ١٠٠٠ جنـيه لشخـص فى تمام السن ٤٠ ومدتها ١٥ سنة ، والأقساط لمدة ٥ سنوات .

١٠ - إثبت جبريـا تساوى الإحتياطى الحسابى وفقا لطريقة الماضى (الطريقة الرجعية) مع الإحتياطى الحسابى وفقا لطريقة المستقبل (الطريقة التطلعية) بالنسبة لكل من العقود الآتية :
١ - عقد تأمين لمدى الحياة يسدد على أقساط سنوية لمدى الحياة .
٢ - عقد تأمين مؤقت يسدد على أقساط سنوية لعدد من السنوات أقل من العدد الذى يحسب الاحتياطى فى نهايته .
٣- قد وقفية بحته ذو قسط وحيد .

- ٤عقد تأمين مختلط يسدد على أقساط سنوية لعدد من السنوات مساوية لمدة العقد .
- ٥عقد تأمين لمدى الحياة يسدد على عدد من السنوات أقل من العدد الذى يحسب الإحتياطى فى نهايته .
- ٦عقد تأمين لمدى الحياة يسدد بقسط وحيد.
- ٧عقد تأمين مؤقت فى حالة التقسيط لمدة العقد .
- ٨عقد وقفية بحته يسدد على أقساط لمدة العقد أو لمدة أكبر من المدة التى يحسب الإحتياطى فى نهايتها .

العمرX	د س Dx	ن س X N	مجـ ن س S x
١٠	٥٥٨٣٩٤	٩٤٢٣٩٧٧	١٤٨٦٥٩٢٨٦
١١	٥٢٦٢٠٢	٨٨٦٥٥٨٣	١٣٩٢٣٥٣٠٩
١٢	٤٩٥٨٦٦	٨٣٣٩٣٨١	١٣٠٣٦٩٧٢٦
١٣	٤٦٧٢٧٩	٧٨٤٣٥١٥	١٢٢٠٣٠٣٤٥
١٤	٤٤٠٣٤٠	٧٣٧٦٢٣٦	١١٤١٨٦٨٣٠
١٥	٤١٤٩٥٤	٦٩٣٥٨٩٦	١٠٦٨١٠٥٩٤
١٦	٣٩١٠٣١	٦٥٢٠٩٤٢	٩٩٨٧٤٦٩٨
١٧	٣٦٨٤٨٨	٦١٢٩٩١١	٩٣٣٥٣٧٥٦
١٨	٣٤٧٢٤٤	٥٧٦١٤٢٣	٨٧٢٢٣٨٤٥
١٩	٣٢٧٢٢٥	٥٤١٤١٧٩	٨١٤٦٢٤٢٢
٢٠	٣٠٨٣٦١	٥٠٨٦٩٥٤	٧٦٠٤٨٢٤٣
٢١	٢٩٠٥٨٣	٤٧٧٨٥٩٣	٧٠٩٦١٢٨٩
٢٢	٢٧٣٨٣١	٤٤٨٨٠١٠	٦٦١٨٢٦٩٦
٢٣	٢٥٨٠٤٤	٤٢١٤١٧٩	٦١٦٩٤٦٨٦
٢٤	٢٤٣١٦٥	٣٩٥٦١٣٥	٥٧٤٨٠٥٠٧
٢٥	٢٢٩١٤٤	٣٧١٢٩٧٠	٥٣٥٢٤٣٧٢
٢٦	٢١٥٩٣٢	٣٤٨٣٨٢٦	٤٩٨١١٤٠٢
٢٧	٢٠٣٣٧٩	٣٢٦٧٨٩٤	٤٦٣٢٧٥٧٦
٢٨	١٩١٧٤٤	٣٠٦٤٤١٥	٤٣٠٥٩٦٨٢
٢٩	١٨٠٦٨٥	٢٨٧٢٦٧١	٣٩٩٩٥٢٦٧
٣٠	١٧٠٢٦١	٢٦٩١٩٨٦	٣٧١٢٢٥٩٦
٣١	١٦٠٤٣٨	٢٥٢١٧٢٥	٣٤٤٣٠٦١٠
٣٢	١٥١١٧٨	٢٣٦١٢٨٧	٣١٩٠٨٨٨٥
٣٣	١٤٢٤٤٩	٢٢١٠١٠٩	٢٩٥٤٧٥٩٨
٣٤	١٣٤٢٢١	٢٠٦٧٦٦٠	٢٧٣٣٧٤٨٩
٣٥	١٢٦٤٦٢	١٩٣٣٤٣٩	٢٥٢٦٩٨٢٩
٣٦	١١٩١٤٧	١٨٠٦٩٧٧	٢٣٣٣٦٣٩٠
٣٧	١١٢٢٤٦	١٦٨٧٨٣٠	٢١٥٢٩٤١٣
٣٨	١٠٥٧٣٧	١٥٧٥٥٨٤	١٩٨٤١٥٨٣
٣٩	٩٩٥٩٤	١٤٦٩٨٤٧	١٨٢٦٥٩٩٩

العمرX	د سDx	ن س X N	مجـ ن س S X
٤٠	٩٣٧٩٦	١٣٧٠٢٥٣	١٦٧٩٦١٥٢
٤١	٨٨٣٢١	١٢٧٦٤٥٧	١٥٤٢٥٨٩٩
٤٢	٨٣١٤٨	١١٨٨١٣٦	١٤١٤٩٤٤٢
٤٣	٧٨٢٦٠	١١٠٤٩٨٨	١٢٩٦١٣٠٦
٤٤	٧٣٦٣٩	١٠٢٦٧٢٨	١١٨٥٦٣١٨
٤٥	٦٩٢٦٨	٩٥٣٠٨٩	١٠٨٢٩٥٩٠
٤٦	٦٥١٣٢	٨٨٣٨٢١	٩٨٧٦٥٠١
٤٧	٦١٢١٦	٨١٨٦٨٩	٨٩٩٢٦٨٠
٤٨	٥٧٥٠٩	٧٥٧٤٧٣	٨١٧٣٩٩١
٤٩	٥٣٩٩٦	٦٩٩٩٦٤	٧٤١٦٥١٨
٥٠	٥٠٦٦٨	٦٤٥٩٦٨	٦٧١٦٥٥٤
٥١	٤٧٥١٤	٥٩٥٣٠٠	٦٠٧٠٥٨٦
٥٢	٤٤٥٢٣	٥٤٧٧٨٦	٥٤٧٥٢٨٦
٥٣	٤١٦٨٨	٥٠٣٢٦٣	٤٩٢٧٥٠٠
٥٤	٣٨٩٩٩	٤٦١٥٧٥	٤٤٢٤٢٣٧
٥٥	٣٦٤٤٩	٤٢٢٥٧٦	٣٩٦٢٦٦٢
٥٦	٣٤٠٣٠	٣٨٦١٢٧	٣٥٤٠٠٨٦
٥٧	٣١٧٣٥	٣٥٢٠٩٧	٣١٥٣٩٥٩
٥٨	٢٩٥٥٨	٣٢٠٣٦٢	٢٨٠١٨٦٢
٥٩	٢٧٤٩٣	٢٩٠٨٠٤	٢٤٨١٥٠٠
٦٠	٢٥٥٣٣	٢٦٣٣١١	٢١٩٠٦٩٦
٦١	٢٣٦٧٣	٢٣٧٧٧٨	١٩٢٧٣٨٥
٦٢	٢١٩٠٩	٢١٤١٠٥	١٦٨٩٦٠٧
٦٣	٢٠٢٣٦	١٩٢١٩٦	١٤٧٥٥٠٢
٦٤	١٨٦٤٩	١٧١٩٦٠	١٢٨٣٣٠٦
٦٥	١٧١٤٥	١٥٣٣١١	١١١١٣٤٦
٦٦	١٥٧٢٠	١٣٦١٦٦	٩٥٨٠٣٥
٦٧	١٤٣٧١	١٢٠٤٤٦	٨٢١٨٦٩
٦٨	١٣٠٩٥	١٠٦٠٧٥	٧٠١٤٢٣
٦٩	١١٨٩٠	٩٢٩٨٠	٥٩٥٣٤٨

العمرX	د سDx	ن س X N	مجـ ن س S X
٧٠	١٠٧٥٤	٨١٠٩٠	٥٠٢٣٦٨
٧١	٩٦٨٥	٧٠٣٣٦	٤٢١٢٧٨
٧٢	٨٦٨٠	٦٠٦٥١	٣٥٠٩٤٢
٧٣	٧٧٣٩	٥١٩٧١	٢٩٠٢٩١
٧٤	٦٨٦١	٤٤٢٣٢	٢٣٨٣٢٠
٧٥	٦٠٤٤	٣٧٣٧١	١٩٤٠٨٨
٧٦	٥٢٨٨	٣١٣٢٧	١٥٦٧١٧
٧٧	٤٥٩٢	٢٦٠٣٩	١٢٥٣٩٠
٧٨	٣٩٥٥	٢١٤٤٧	٩٩٣٥١
٧٩	٣٣٧٦	١٧٤٩٢	٧٧٩٠٤
٨٠	٢٨٥٣	١٤١١٦	٦٠٤١٢
٨١	٢٣٨٥	١١٢٦٣	٤٦٢٩٦
٨٢	١٩٧٩	٨٨٧٨	٣٥٠٣٣
٨٣	١٦٠٩	٦٩٠٧	٢٦١٥٥
٨٤	١٢٩٥	٥٢٩٨	١٩٢٤٨
٨٥	١٠٢٧	٤٠٠٣	١٣٩٥٠
٨٦	٨٠١	٢٩٧٦	٩٩٤٧
٨٧	٦١٥	٢١٧٥	٦٩٧١
٨٨	٤٦٣	١٥٦٠	٤٧٩٦
٨٩	٣٤١	١٠٩٧	٣٢٣٦
٩٠	٢٤٧	٧٥٦	٢١٣٩
٩١	١٧٤	٥٠٩	١٣٨٣
٩٢	١٣٠	٣٣٥	٨٧٤
٩٣	٨١	٢١٥	٥٣٩
٩٤	٥٢	١٣٤	٣٢٤
٩٥	٣٤	٨٢	١٩٠
٩٦	٢٠	٤٨	١٠٨
٩٧	١٣	٢٨	٦٠
٩٨	٧	١٥	٣٢
٩٩	٤	٨	١٧

A ٤٩-٥٢ ult   ٦٪

العمر x	ج س C X	م س M X	مج م س R X
١٠	٥٨٥	٢٤٩٦٢	١٠٠٩٢٥٥
١١	٥٥١	٢٤٣٧٧	٩٨٤٢٩٣
١٢	٥١٩	٢٣٨٢٦	٩٥٩٩١٦
١٣	٤٨٩	٢٣٣٠٧	٩٣٦٠٩٠
١٤	٤٦١	٢٢٨١٨	٩١٢٧٨٣
١٥	٤٣٥	٢٢٣٥٧	٨٨٩٩٦٥
١٦	٤١٠	٢١٩٢٢	٨٦٧٦٠٨
١٧	٣٦٨	٢١٥١٢	٨٤٥٦٨٦
١٨	٣٦٤	٢١١٢٦	٨٢٤١٧٤
١٩	٣٤٣	٢٠٧٦٢	٨٠٣٠٤٨
٢٠	٣٢٣	٢٠٤١٩	٧٨٢٢٨٦
٢١	٣٠٤	٢٠٠٩٦	٧٦١٨٦٧
٢٢	٢٨٧	١٩٧٩٢	٧٤١٧٧١
٢٣	٢٧٣	١٩٥٠٥	٧٢١٩٧٩
٢٤	٢٥٧	١٩٢٣٢	٧٠٢٤٧٤
٢٥	٢٤٢	١٨٩٧٥	٦٨٣٢٤٢
٢٦	٢٣٠	١٨٧٣٣	٦٦٤٢٦٧
٢٧	٢١٧	١٨٥٠٣	٦٤٥٥٣٤
٢٨	٢٠٦	١٨٢٨٦	٦٢٧٠٣١
٢٩	١٩٦	١٨٠٨٠	٦٠٨٧٤٥
٣٠	١٨٦	١٧٨٨٤	٥٩٠٦٦٥
٣١	١٧٩	١٧٦٩٨	٥٧٢٧٨١
٣٢	١٧١	١٧٥١٩	٥٥٥٠٨٣
٣٣	١٦٥	١٧٣٤٨	٥٣٧٥٦٤
٣٤	١٦١	١٧١٨٣	٥٢٠٢١٦
٣٥	١٥٧	١٧٠٢٢	٥٠٣٠٣٣
٣٦	١٥٦	١٦٨٦٥	٤٨٦٠١١
٣٧	١٥٦	١٦٧٠٩	٤٦٩١٤٦
٣٨	١٥٨	١٦٥٥٣	٤٥٢٤٣٧
٣٩	١٦١	١٦٣٩٥	٤٣٥٨٨٤

العمر x	ج س C X	م س M X	مج م س R X
٤٠	١٦٦	١٦٢٣٤	٤١٩٤٨٩
٤١	١٧٣	١٦٠٦٨	٤٠٣٢٥٥
٤٢	١٨١	١٥٨٩٥	٣٨٧١٨٧
٤٣	١٩١	١٥٧١٤	٣٧١٢٩٣
٤٤	٢٠٣	١٥٥٢٣	٣٥٥٥٧٨
٤٥	٢١٦	١٥٣٢٠	٣٤٠٠٥٥
٤٦	٢٢٩	١٥١٠٤	٣٢٤٧٣٥
٤٧	٢٤٣	١٤٨٧٥	٣٠٩٦٣١
٤٨	٢٥٧	١٤٦٣٢	٢٩٤٧٥٦
٤٩	٢٧٢	١٤٣٧٥	٢٨٠١٢٤
٥٠	٢٨٦	١٤١٠٣	٢٦٥٧٤٩
٥١	٣٠١	١٣٨١٧	٢٥١٦٤٦
٥٢	٣١٥	١٣٥١٦	٢٣٧٨٢٩
٥٣	٣٢٩	١٣٢٠١	٢٢٤٣١٣
٥٤	٣٤٣	١٢٨٧٢	٢١١١١٢
٥٥	٣٥٦	١٢٥٢٩	١٩٨٢٤٠
٥٦	٣٦٩	١٢١٧٣	١٨٥٧١١
٥٧	٣٨١	١١٨٠٤	١٧٣٥٣٨
٥٨	٣٩٣	١١٤٢٣	١٦١٧٣٤
٥٩	٤٠٤	١١٠٣٠	١٥٠٣١١
٦٠	٤١٤	١٠٦٢٦	١٣٩٢٨١
٦١	٤٢٤	١٠٢١٢	١٢٨٦٥٥
٦٢	٤٣٣	٩٧٨٨	١١٨٤٤٣
٦٣	٤٤١	٩٣٥٥	١٠٨٦٥٥
٦٤	٤٤٨	٨٩١٤	٩٩٣٠٠
٦٥	٤٥٥	٨٤٦٦	٩٠٣٨٦
٦٦	٤٥٩	٨٠١١	٨١٩٢٠
٦٧	٤٦٢	٧٥٥٢	٧٣٩٠٩
٦٨	٤٦٤	٧٠٩٠	٦٦٣٥٧
٦٩	٤٦٣	٦٦٢٦	٥٩٢٦٧

العمر x	ج س C X	م س M X	مج م س R X
٧٠	٤٦١	٦١٦٣	٥٢٦٤١
٧١	٤٥٦	٥٧٠٢	٤٦٤٧٨
٧٢	٤٤٩	٥٢٤٦	٤٠٧٧٦
٧٣	٤٤٠	٤٧٩٧	٣٥٥٣٠
٧٤	٤٢٨	٤٣٥٧	٣٠٧٣٣
٧٥	٤١٤	٣٩٢٩	٢٦٣٧٦
٧٦	٣٩٧	٣٥١٥	٢٢٤٤٧
٧٧	٣٧٧	٣١١٨	١٨٩٣٢
٧٨	٣٥٦	٢٧٤١	١٥٨١٤
٧٩	٣٣٢	٢٣٨٥	١٣٠٧٣
٨٠	٣٠٦	٢٠٥٣	١٠٦٨٨
٨١	٢٧٩	١٧٤٧	٨٦٣٥
٨٢	٢٥١	١٤٦٨	٦٨٨٨
٨٣	٢٢٣	١٢١٧	٥٤٢٠
٨٤	١٩٥	٩٩٤	٤٢٠٣
٨٥	١٦٧	٧٩٩	٣٢٠٩
٨٦	١٤١	٦٣٢	٢٤١٠
٨٧	١١٧	٤٩١	١٧٧٨
٨٨	٩٥	٣٧٤	١٢٨٧
٨٩	٧٥	٢٧٩	٩١٣
٩٠	٥٩	٢٠٤	٦٣٤
٩١	٤٤	١٤٥	٤٣٠
٩٢	٣٣	١٠١	٢٨٥
٩٣	٢٣	٦٨	١٨٤
٩٤	١٦	٤٥	١١٦
٩٥	١١	٢٩	٧١
٩٦	٧	١٨	٤٢
٩٧	٥	١١	٢٤
٩٨	٣	٦	١٣
٩٩	٢	٣	٧

أعمدة مختارة لحل الأمثلة من جدول الرموز الحسابية لجدول الحياة الأمريكى لعام ١٩٥٨ المعدل ٣%

س x	د س× D	ن س× N	مجـ ن س× S	د س×a
٣٠	٣٩٠٥٧٨٢,٠	٩١٦٩٨٤٦١,٨	١٦٢٤١٢٧٨٦٠,٥	٢٣,٤٧٧٦٢
٣٥	٣٣٣١٢٩٥,٤	٧٣٣٥٢٦٤٨,١	١٢٠٣٤٩٢٧٩٧,٩	٢٢,٠١٩٢٦
٤٠	٢٨٣٣٠٠١,٨	٥٧٧١٩٣٤٧,٤	٨٦٩٠٠٥٤٥٢,٠	٢٠,٣٧٣٩٢
٤٥	٢٣٩٢٩٠٤,٨	٤٤٤٥٥١٦٤,١	٦٠٧٨٢٧٣١٢,٨	١٨,٥٧٧٩١
٥٠	١٩٩٨٧٤٤,٠	٣٣٢٩٤٩٥٠,٩	٤٠٨٦٦٧٩٠٢,٣	١٦,٦٥٧٩٤
٥٥	١٦٣٩٣٢٩,٧	٢٤٠٣٢١٧٧,٤	٢٦١٤٤٣٣٨٧,١	١٤,٦٥٩٧٦
٦٠	١٣٠٦٧٢٣,٨	١٦٥١٠٠٧٨,٨	١٥٦٩٩٦٤١٦,٣	١٢,٦٣٤٧١
٦١	١٢٤٢٨٥٩,٢	١٥٢٠٣٣٥٥,٠	١٤٠٤٨٦٣٣٧,٥	١٢,٢٣٢٥٦
٧٥	٤٤٩٩٣٣,٥	٣٢١٦٣٠٩,١	١٨٦٤٩٢٤٦,٠	٧,١٤٨٤١
٧٦	٤٠٤٧٧٨,٥	٢٧٦٦٣٧٥,٦	١٥٤٣٢٩٣٦,٩	٦,٨٣٤٢٩
٣٠	٨٠٧٦,٩٤١	١٢٣٤٩٥٢,٩٩٠	٤٤٣٩٣٧٦٧,١١١	٠,٣١٦١٨٥٨
٣٥	٨١١٧,٩٢٣	١١٩٤٨١٠,٤٨٩	٣٨٢٩٩٤٦٠,٠٢٩	٠,٣٥٨٦٦٢٤
٤٠	٩٧٠٩,٢٢١	١١٥١٨٥٥,٧٧٨	٣٢٤٠٨٥٠٩,٣٠٦	٠,٤٠٦٥٨٤٩
٤٥	١٢٤٢٩,١٢٩	١٠٩٨٠٩٤,٢٣٥	٢٦٧٥١٤٥٦,٣٣٥	٠,٤٥٨٨٩٥٩
٥٠	١٦١٤٥,١٠٩	١٠٢٨٩٨٨,١٨٤	٢١٣٩٢٠٠٢,٥٦٣	٠,٥١٤٨١٧٤
٥٥	٢٠٦٩٠,٥٤٦	٩٣٩٣٦٣,٣٤٨	١٦٤١٧٣٢١,٦١١	٠,٥٧٣٠١٦٧
٦٠	٢٥٨٠٤,٧٠٣	٨٢٥٨٤٧,٧٧٢	١١٩٣٧٣٦٧,٧٧٦	٠,٦٣١٩٩٨٧
٦١	٢٦٨٣٦,٠٣٦	٨٠٠٠٤٣,٠١٩	١١١١١٥٢٠,٠٥٤	٠,٦٤٣٧١١٧
٧٥	٣٢٠٥٠,٠٩٥	٣٥٦٢٥٤,٥٨٤	٢٦٧٣١٢٧,١٤٧	٠,٧٩١٧٩٣٩
٧٦	٣١١١٦,٩٠٥	٣٢٤٢٠٤,٤٨٩	٢٣١٦٨٧٢,٥٦٣	٠,٨٠٠٩٤٣٠

فهـــرس